Письма в ЖЭТФ, том 67, вып.9, стр.640 - 645 © 1998г. 10 мая

О НЕКВАЗИНЕЙТРАЛЬНОСТИ И ТУРБУЛЕНТНОМ ПЕРЕНОСЕ ТЕПЛА В ТОКАМАКЕ

*С.Н.Гордиенко, Э.И.Юрченко**

Институт теоретической физики им.Л.Д.Ландау РАН
142432 Черноголовка, Московской обл., Россия

**Российский научный центр "Курчатовский институт"*
123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 февраля 1998 г.
После переработки 1 апреля 1998 г.

Предложен новый подход к описанию далекого от термодинамического равновесия стационарного турбулентного состояния, формирующегося в плазменном шнуре токамака в результате развития микронеустойчивостей. Принципиальной особенностью такой сильнонеравновесной плазмы является ее неквазинейтральность, то есть свойства плазмы в значительной мере определяются электрическими полями, локализованными на масштабе порядка дебаевского радиуса. Установлено, что коэффициент поперечной температуропроводности определяется выражением

$$\chi_{\perp}(r) = \mathrm{const}\,\frac{eU}{mc^2}\,\frac{q(r)}{2-S(r)}\,\frac{cT(r)}{eB},$$

где U — напряжение на обходе токамака. В рамках предлагаемого подхода объясняется соотношение $n(r)q(r) = \mathrm{const}$ и рост температуропроводности на периферии плазменного шнура.

PACS: 52.25.Dy, 52.35.Ra, 52.55.Fa

В настоящее время проектирование термоядерного реактора на основе токамака является одной из самых актуальных прикладных задач физики плазмы. Вместе с тем, несмотря на достигнутые успехи, понимание ряда важнейших физических процессов, происходящих в плазме токамака, все еще отсутствует. Трудности, связанные с описанием плазменного шнура, вызваны тем, что в макроскопически устойчивом режиме плазма токамака не является полностью устойчивой [1], так как в ней может развиваться широкий класс различных кинетических неустойчивостей.

1. В представляющих наибольший интерес режимах работы токамаков созданы такие условия, когда плазменный шнур находится в макроскопически устойчивом состоянии, но существуют микронеустойчивости, которые могут развиваться в плазме шнура [2].

Стандартный подход к описанию микронеустойчивостей состоит в линеаризации кинетического уравнения в окрестности равновесного состояния и исследовании линеаризованной задачи на наличие растущих по времени возмущений [2]. К сожалению, подобный подход не позволяет описать конечный результат развития неустойчивостей, то есть описать неравновесное с точки зрения термодинамики стационарное турбулентное состояние, возникающее в результате стабилизации неустойчивостей нелинейными взаимодействиями. Заметим, что для понимания физики разрядов в токамаке интерес представляет не столько линейная неустойчивость, которая привела к стационарному неравновесному состоянию, сколько описание самого состояния плазмы с установившейся микротурбулентностью.

Для описания турбулентного стационарного состояния (развитой микротурбулентности) плазмы в работе [3] был предложен совершенно другой подход. Напомним, что неустойчивости в плазме возникают из-за неравновесности плазмы, то есть из-за того, что приходящаяся на одну частицу энтропия отличается на величину Δs от значения энтропии s_{max} в термодинамически равновесном состоянии. Поскольку

$$s_{max} = \int_0^T \frac{c_V}{T}\, dT,$$

вклад в интеграл от температур, превышающих $e^2 n^{1/3}$, для которых для плазмы можно считать $c_V = 3/2$, оценивается величиной $\ln N_D$, то есть большое число частиц в дебаевской сфере $N_D = \left(T/e^2 n^{1/3}\right)^{3/2}$ оказывается достаточным условием для возможности реализации неравновесных состояний высокотемпературной плазмы с большими Δs. Для описания однородной изотропной установившейся микротурбулентности в [3] после предельного перехода $\exp(\Delta s) \to \infty$ был рассмотрен предел больших времен $t \to +\infty$ (порядок предельных переходов важен!). Таким образом, предполагается, что плазма в токамаке все время находится в состоянии, далеком от термодинамически равновесного. Это не противоречит H-теореме, из которой следует монотонное возрастание энтропии с характерным временем порядка столкновительного, поскольку H-теорема доказывается для замкнутой системы, а к плазменному шнуру токамака подводится мощность и поток энергии может постоянно обеспечивать сильную неравновесность плазмы. Если условие сильной неравновесности плазмы в том или ином типе плазменных установок оказывается не согласующимся с граничными условиями, характером нагрева или получающиеся из него теоретические предсказания противоречат экспериментальным данным, то от гипотезы о сильнонеравновесном турбулентном стационарном состоянии, реализующемся в этой установке, следует отказаться и рассмотреть неравновесные стационарные состояния, близкие к термодинамически равновесному.

Кинетические уравнения, пригодные для описания плазмы с сильной неравновесностью, получены в [3], где показано, что с этими кинетическими уравнениями связана нетривиальная двухпараметрическая абелева группа преобразований (группа турбулентных размерностей [3]), переводящая одно их решение в другое. Рассмотрение решений, инвариантных относительно подгруппы группы турбулентных размерностей, выделяемой условием $\lambda_2 = \lambda_1^{D+1/2}$, где λ_1 и λ_2 — параметры группы турбулентных размерностей, показывает, что в "прямом" магнитном поле при наличии развитой микротурбулентности

$$\exp(\Delta s) \gg 1 \tag{1}$$

существует целое однопараметрическое семейство стационарных турбулентных состояний плазмы, параметризуемых параметром D. Соображения размерностей, применяемые как по отношению к обычным физическим размерностям (г, см, с), так и по отношению к новым "формальным" размерностям, описываемым группой турбулентных размерностей [3, 4], позволяют убедиться, что при $D^2 \ll 1$ коэффициенты поперечной температуропроводности и продольной проводимости даются выражениями

$$\chi_\perp = C_1 D^2 \chi_{Bohm} + C_2 \left(\frac{r_D}{\rho_e}\right)^2 \chi_{cl}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{\sigma_{\parallel}} = C_3 \frac{D^2}{\Omega_{ce}} + C_4 \frac{1}{\sigma_{Sp}}, \tag{3}$$

а плотность энергии W флуктуационных электрических полей равна

$$\frac{W}{nT} = C_5 \frac{1}{N_D^{2/3}} + C_6 D^2 \left(\frac{r_D}{\rho_e}\right)^2, \tag{4}$$

где $\chi_{Bohm} \sim T/B$ и $\chi_{cl} \sim n/B^2\sqrt{T}$ – бомовская и классическая температуропроводности плазмы, Ω_{ce} и $\sigma_{Sp} \sim T^{3/2}$ – циклотронная частота и спитцеровская проводимость плазмы, C_i, $i = \overline{1,6}$ – фиксированные числа, r_D и ρ_e – дебаевский радиус и ларморовский радиус электрона, соответственно. Таким образом, параметр неквазинейтральности D, возникающий как симметрийное свойство, согласно (4), характеризует величину флуктуаций электрического поля на дебаевском масштабе, то есть эффекты неквазинейтральности плазмы (см.подробности в работе [5]).

2. При рассмотрении однородной и изотропной развитой микротурбулентности [3–5] величина D являлась таким же независимым параметром задачи, как n или T, и указывала на тип турбулентности, реализуемый в плазме. Однако в реальном токамаке величина D должна вычисляться, исходя из заданных граничных и начальных условий, режимов подвода энергии и вещества к плазменному шнуру.

В случае токамака, как будет следовать из дальнейшего, интерес представляют лишь малые D^2, при которых, однако, первое слагаемое в (2) и (3) значительно превышает второе, то есть справедливо неравенство

$$\frac{1}{N_D}\left(\frac{r_D}{\rho_e}\right)^2 \ll D^2 \ll 1. \tag{5}$$

Считая весь ток в плазме, текущий вдоль оси токамака, индукционным, что справедливо в силу неравенства $a/R \ll 1$, где a и R – малый и большой радиусы токамака (во всех формулах в дальнейшем мы также сохраняем лишь члены первого неисчезающего порядка по параметру a/R, то есть не учитываем эффекты, возникающие в более высоких порядках), из закона Ома получаем

$$j = \sigma_{\parallel} E, \tag{6}$$

где E – электрическое поле, поддерживающее индукционный ток в токамаке.

Используя (3), (5), (6) и связь плотности тока с коэффициентом запаса устойчивости $q(r)$, находим

$$D^2(r) = \frac{1}{C_3}\frac{eU}{mc^2}\frac{q(r)}{2 - S(r)}, \tag{7}$$

где $U = 2\pi RE$ – напряжение обхода на токамаке, а для коэффициента поперечной температуропроводности, согласно (2), получаем

$$\chi_{\perp}(r) = \frac{C_1}{C_3}\frac{eU}{mc^2}\frac{q(r)}{2 - S(r)}\frac{cT(r)}{eB}, \tag{8}$$

где B – тороидальное магнитное поле, $S(r) = rq'(r)/q(r)$ – шир, $T(r)$ – температура на расстоянии r от оси по малому радиусу, $q(r) = rB/RB_{\Theta}(r)$, $B_{\Theta}(r)$ – полоидальное магнитное поле.

Для получения более детальных сведений о радиальной зависимости коэффициента температуропроводности в плазменном шнуре следует изучить вопрос о самосогласованном распределении температуры и коэффициента запаса устойчивости, чему посвящены следующие разделы настоящей работы.

3. Прежде всего, рассмотрим вопрос о нахождении $D(\mathbf{r})$ в макроскопически устойчивой плазме при заданных $T(\mathbf{r})$ и $n(\mathbf{r})$. Заметим, что чем больше значение параметра неквазинейтральности D, тем сильнее флуктуационные электрические поля, развитые в плазме [5], а значит, и корреляции между частицами, создающими плазму, то есть при увеличении D уменьшается доля фазового объема, доступная системе, что влечет и уменьшение энтропии, так как величина D определяет амплитуду коллективных (макроскопических) движений, возбужденных в плазме и коррелированных на масштабах порядка дебаевского радиуса.

Таким образом, если вся плазма находится в макроскопически устойчивом состоянии, то требование максимума плотности энтропии приведет к установлению минимального значения D, совместимого с условием макроскопической устойчивости в данном объеме. Следовательно, требование гидродинамической устойчивости плазмы позволяет вычислять параметр неквазинейтральности, который формируется из-за развития кинетических неустойчивостей.

Принцип максимума плотности энтропии не является произвольным условием, а следует из динамики плазмы. Если система эргодична, то время τ_D, проводимое системой в области фазового пространства $\Delta\Gamma_D$, с заданным значением параметра неквазинейтральности D

$$\tau_D \sim \Delta\Gamma_D = \exp(Ns_D), \tag{9}$$

где s_D – энтропия, приходящаяся на одну частицу в турбулентном состоянии плазмы с параметром неквазинейтральности D, а N – число частиц в системе.

Требование роста энтропии при эволюции позволяет детальнее описать процесс поперечного теплопереноса в плазме с параметром неквазинейтральности, подчиненным (5). Малость D^2 позволяет не учитывать при вычислении энтропии зависимость функций распределения от параметра неквазинейтральности, учитывая зависимость от D^2 лишь в коэффициентах переноса. В этом приближении, исходя из формулы Больцмана для энтропии идеального газа, применимой к плазме при малых D^2, можно записать

$$S = \mathrm{const} \int n(\mathbf{r}) \ln\left(\frac{T^{3/2}(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})}\right) dV, \tag{10}$$

а требование, чтобы при любых начальных условиях система увеличивала энтропию, приводит к следующему выражению для поперечного потока тепла:

$$\mathbf{Q}_\perp = -C_1 D^2 \frac{nT}{B} \nabla_\perp T. \tag{11}$$

Для рассматриваемых турбулентных стационарных состояний плазмы в (11) отсутствует слагаемое, пропорциональное $\nabla_\perp n$, так как его сохранение привело бы в выражении для прироста энтропии слагаемого, пропорционального $(\nabla_\perp T, \nabla_\perp n)$, что допускало бы и эволюцию с отрицательным производством энтропии. Перпендикулярность $\nabla_\perp T$ и $\nabla_\perp n$ магнитному полю использована в последних рассуждениях, когда предполагалось, что $\nabla_\perp T$ и $\nabla_\perp n$ можно считать независимыми: при отсутствии такого магнитного поля в плазме возникнут макроскопические движения, выравнивающие давление и делающие ∇T и ∇n взаимозависимыми. Кроме того, для турбулентных стационарных состояний ни при каких соотношениях между $\nabla_\perp T$ и $\nabla_\perp n$ "не включается" дополнительный источник производства энтропии, связанный с развитием новых неустойчивостей, поскольку в турбулентном стационарном состоянии уже учтены все возможные электростатические неустойчивости.

4. Устойчивость плазменного шнура в токамаке подразумевает, в частности, устойчивость баллонных мод, возбуждаемых широм. Известно, что именно баллонные неустойчивости будут доминировать в экспериментах с большими β и потому представляют особый интерес с точки зрения получения плазмы с высоким энергосодержанием. Критерием устойчивости баллонных мод является неравенство [6, 7]

$$\frac{1}{2}S^2 + \alpha\epsilon\left(1 - \frac{1}{q^2}\right) - \frac{1}{2}S\alpha^2 > 0, \tag{12}$$

где $\alpha = -8\pi p'(r)Rq^2(r)/B^2$, $\epsilon = r/R$.

Минимальному $D^2(r)$, обеспечивающему устойчивость баллонных мод, соответствует максимальная плотность тока, не приводящая к нарушению (12). Отбрасывая второе слагаемое в (12), при рассмотрении всех эффектов лишь в первом неисчезающем порядке по a/R легко видеть, что (12) можно переписать в виде

$$S = \alpha^2 \tag{13}$$

и рассматривать, как дифференциальное уравнение первого порядка, позволяющее элементарно выразить $p(r)$ через $q(r)$. Используя (2) без второго слагаемого из-за (5) при учете (11), а также уже установленную зависимость $p(r)$ от $q(r)$, при заданном потоке тепла $Q(r)$ через поверхность с радиусом r, что определяется механизмом нагрева плазмы, получаем распределение температуры по плазменному шнуру в виде функционала от $q(r)$. Таким образом, мы получаем величины $n(r)$ и энтропии (см. (10)) как функционалы от $q(r)$. Варьирование энтропии при заданном количестве вещества $2\pi \int_0^a n(r)r\,dr$, приводит к нелинейной задаче на собственные значения описывающей пинчевание плазмы в токамаке.

5. В настоящей работе мы воспользуемся простым вариационным методом, который приводит к значительным упрощениям и позволяет составить правильное представление о структуре разряда в случае удачного выбора пробной функции.

Для описания разрядов с характерным пространственным масштабом r_0 ($r_0 \ll a$) будем искать $q(r)$ в виде

$$q(r) = q_0(1 + (r/r_0)^2), \tag{14}$$

то есть функции со свободными параметрами q_0 и r_0.

Кроме того, для определения структуры разряда необходимо задать функцию $Q(r)$. Для определенности примем

$$Q(r) = Q_{Ohm}(r) + Q_0, \quad Q_{Ohm}(r) = 4\pi^2 R \int_0^r Ej(r)r\,dr, \tag{15}$$

где $Q_0 = \text{const}$ – не зависящий от радиуса поток тепла, который можно интерпретировать как мощность, вносимую в центр плазменного шнура пучком нейтральной инжекции, а $Q_{Ohm}(r)$ – омический нагрев плазмы.

Простые вычисления по схеме, описанной в конце предыдущего раздела, с использованием (13)–(15) дают при $r_0/a \ll 1$

$$p(r) \sim 1/r^3,\ T(r) \sim 1/r,\ n(r) \sim 1/r^2 \text{ при } r > r_0. \tag{16}$$

Кроме того, при $Q_0 = 0$ для разрядов, описываемых выражением (14),

$$n(r)q(r) = \text{const}, \tag{17}$$

а при $Q_0 \neq 0$ соотношение (17) выполняется при $r > r_0$. Таким образом, при дополнительном нагреве, не слишком сильно превышающем омический, следует ожидать приближенного выполнения (17) при всех r.

Независимость произведения коэффициента запаса устойчивости на концентрацию от малого радиуса действительно наблюдалась экспериментально на токамаках TEXT и TFTR (см. обзор [8], где сделана попытка объяснить это, исходя из далеко небесспорных теоретических соображений, основанных на ТРР, хотя сам формализм ТРР является вполне обоснованным в конкретном круге задач, связанных с магнитными ловушками [9]).

Для коэффициента температуропроводности $\chi_\perp(r)$ на периферии шнура, согласно (2), (14), находим

$$\chi_\perp = C_1 D^2(r)\frac{cT(r)}{eB} \sim \left(\frac{r}{r_0}\right)^3,\ r > r_0. \tag{18}$$

Рост температуропроводности на периферии плазменного шнура является надежно установленным экспериментально и принципиально важным явлением [10], не имеющим до настоящего времени теоретического объяснения. Заметим, что растущий по кубическому закону ($\chi \sim r^3$) на периферии плазмы коэффициент температуропроводности ранее успешно применялся для описания экспериментальных коэффициентов температуропроводности в L-режимах токамаков JET, D3–D, TFTR, JT–60U, PBX–M, TORE SUPRA [11].

Авторы выражают искреннюю благодарность В.Д.Шафранову, обратившему их внимание на связь турбулентности и пинчевания, а также С.И.Анисимову за интерес к работе и полезное обсуждение результатов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Совета по поддержке ведущих научных школ 96–15–96448 и 96-15-96815.

1. Б.В.Кадомцев, В.С.Муховатов, В.Д.Шафранов, Физика плазмы **9**, 5 (1983).
2. А.Б.Михайловский, *Теория плазменных неустойчивостей. Неустойчивости неоднородной плазмы*, т.**2**, М.: Атомиздат, 1977.
3. С.Н.Гордиенко, Физика плазмы **23**, 754 (1997).
4. С.Н.Гордиенко, Физика плазмы (1998), в печати.
5. С.Н.Гордиенко, Э.И.Юрченко, Физика плазмы (1998), в печати.
6. О.П.Погуце, Э.И.Юрченко, Письма в ЖЭТФ **28**, 344 (1978).
7. О.П.Погуце, Э.И.Юрченко, *Вопросы теории плазмы*, вып. 11, М.: Энергоатомиздат, 1982.
8. В.В.Яньков, УФН **167**, 499 (1997).
9. В.П.Пастухов, Физика плазмы **6**, 1003 (1980).
10. С.В.Мирнов, *Физические процессы в плазме токамака*, М.: Наука, 1983.
11. Ю.В.Готт, Э.И.Юрченко, Физика плазмы **20**, 853 (1996).