Письма в ЖЭТФ, том 67, вып.11, стр.892 - 897

РЕДУЦИРОВАННАЯ МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА ТОРОИДАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ С ТЕЧЕНИЯМИ

В.П.Пастухов[1)]

Российский научный центр "Курчатовский институт"

123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 8 января 1998 г.

После переработки 27 апреля 1998 г.

Путем корректного исключения быстрых магнитозвуковых колебаний получена упрощенная система МГД уравнений, описывающих нелинейную динамику тороидальной плазмы в сильном магнитном поле. В отличие от известных ранее аналогов (уравнений Кадомцева - Погуце, Страусса и др.) в полученной системе уравнений не нарушены симметрии и соответствующие законы сохранения, присущие исходной полной системе МГД уравнений, что позволяет использовать полученную систему для анализа динамики плазмы с течениями и избежать накопления погрешностей при рассмотрении длительной эволюции возмущений.

PACS: 52.30.-q

Для динамики плазмы в сильном магнитном поле ($\beta \equiv 8\pi p/B^2 \ll 1$) характерны движения, при которых магнитное поле возмущается относительно слабо. Наиболее сильное возмущение энергии магнитного поля связано с магнитозвуковыми колебаниями, имеющими характерную частоту $\omega \sim k_\perp C_A$ (C_A - скорость Альфвена), в то время как наиболее интересным динамическим процессам, в частности, магнитогидродинамическим (МГД) неустойчивостям, соответствуют возмущения, сильно вытянутые вдоль магнитного поля ($k_\| \ll k_\perp$) и имеющие характерные частоты, типичные для альфвеновских волн $\omega \sim k_\| C_A$ или ниже. В таких процессах быстрые магнитозвуковые степени свободы практически не возмущаются, поэтому желательно исключить их с самого начала и рассматривать более простую (редуцированную) систему уравнений.

Впервые идея редуцированных МГД уравнений была выдвинута и реализована применительно к токамаку в работах Кадомцева и Погуце [1,2]. Основой их подхода было разложение исходной системы уравнений по малому отношению полоидального и тороидального магнитных полей или по обратному аспектному отношению $\epsilon = B_p/B_T \sim a/R$, где a и R - малый и большой радиусы тороидальной плазмы. В ряде последующих работ [3-6] были учтены малое, но конечное, β и продольные ионно-звуковые колебания. Однако все эти работы были не вполне последовательны. Так, в них полностью пренебрегалось возмущением продольного поля $\tilde{B}_\|$ и $\mathrm{div}\mathbf{V}_\perp$, что справедливо только в главном порядке. Корректное редуцирование уравнений движения в предположении $\omega \le \epsilon k_\perp C_A$ и $k_\| \le \epsilon k_\perp$ требует приравнивания нулю возмущений силовых членов как в главном порядке, так и в порядке ϵ. При этом величины $\tilde{B}_\| \sim \epsilon \tilde{B}_\perp$ и $\mathrm{div}\mathbf{V}_\perp \sim \epsilon k_\perp V_\perp$ не могут одновременно обращаться в нуль и должны быть удержаны в редуцированных уравнениях. Еще более отчетливо недостаточная корректность редуцированных уравнений, полученных в [1-6], проявляется в том, что эти уравнения не допускают стационарных состояний плазмы с течениями, присущих исходной МГД системе, что связано с нарушением симметрий

1) e-mail: past@qq.nfi.kiae.su

исходных уравнений. В более поздних работах [7,8] для описания динамики плазмы со стационарными течениями, направленными вдоль магнитного поля, были предложены модифицированные версии редуцированных уравнений. Однако и в этих версиях присутствуют указанные выше недостатки. В частности, они не допускают стационарных течений общего вида.

В данной работе редуцированная система уравнений для идеальной МГД модели получается путем последовательного разделения быстрого и медленного движений. Этот подход аналогичен выявлению адиабатических инвариантов и построению адиабатических уравнений движения в классической лагранжевой механике. С этой целью рассмотрим вариацию стандартного лагранжиана одножидкостной МГД модели [9]:

$$\delta\mathcal{L} = \int d\mathbf{r} \left(\rho \mathbf{V} \delta \mathbf{V} + \frac{V^2}{2} \delta\rho - \frac{\delta p}{\gamma - 1} - \mathbf{B} \delta \mathbf{B} \right) \tag{1}$$

(здесь и далее коэффициент $1/4\pi$ включен в нормировку $\mathbf{B}$). В этом выражении вариации физических величин не являются полностью независимыми, поскольку на них наложены ограничения в виде уравнений вмороженности, непрерывности и адиабаты:

$$\partial_t \mathbf{B} = \mathrm{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \ , \tag{2}$$

$$\partial_t \rho + \mathrm{div} \rho \mathbf{V} = 0 \ , \tag{3}$$

$$\partial_t s + \mathbf{V} \nabla s = 0 \ , \tag{4}$$

где $s = p/\rho^\gamma$ - энтропийная функция. Уравнения (2) – (4) представляют собой локальные законы сохранения в смысле обращения в нуль соответствующих производных Ли [10]. Согласно [9], уравнения (2) – (4) допускают интегрирование в общем виде путем введения трех независимых лагранжевых координат с невырожденным якобианом. В данной работе рассматриваются магнитные системы с топологией тороидально вложенных магнитных поверхностей (токамаки, стеллараторы и т.п.). В соответствии с работами [11,12], в которых динамика таких систем рассмотрена наиболее подробно, выберем в качестве лагранжевых координат полоидальный поток ψ, полоидальный угол θ и тороидальный угол ζ, соответствующие координатной системе с выпрямленными силовыми линиями. Тогда $\mathbf{B}$, ρ и s, удовлетворяющие (2) – (4), представляются в виде

$$\mathbf{B} = [\nabla\psi \times (q\nabla\theta - \nabla\zeta)] \ , \quad \rho = J\hat{\rho}(\psi, \theta, \zeta) \ , \quad s = s(\psi) \ , \tag{5}$$

где $q(\psi)$ - традиционный коэффициент "запаса устойчивости", а $J = \nabla\psi[\nabla\theta \times \nabla\zeta] \neq 0$, как и ρ, удовлетворяет (3). Введенная система координат порождает контравариантный $\nabla\psi$, $\nabla\theta$, $\nabla\zeta$ и ковариантный

$$\mathbf{e}_\psi = [\nabla\theta \times \nabla\zeta]/J \ , \quad \mathbf{e}_\theta = [\nabla\zeta \times \nabla\psi]/J \ , \quad \mathbf{e}_\zeta = [\nabla\psi \times \nabla\theta]/J$$

базисы, с использованием которых скорость принимает вид:

$$\mathbf{V} = -\mathbf{e}_\psi \dot{\psi} - \mathbf{e}_\theta \dot{\theta} - \mathbf{e}_\zeta \dot{\zeta} \ , \tag{6}$$

где точка обозначает ∂_t. Приведенные выражения позволяют явно записать лагранжиан системы в терминах независимых лагранжевых координат и их первых производных по времени и пространству.

В работах [12,13] было показано, что в системах с топологией вложенных тороидальных магнитных поверхностей имеется маркировочное преобразование лагранжевых координат (relabeling), не меняющее лагранжиан системы. Это преобразование симметрии задает структуру нейтральных течений, которые могут присутствовать и в стационарном состоянии системы. В работах [12,13] также найдены динамические законы сохранения, которые порождаются этими преобразованиями в соответствии с теоремой Нетер [10]. В данной работе для разделения быстрых и медленных движений и вывода редуцированных уравнений движения используется сходная процедура, а именно, будем искать такие преобразования независимых переменных, которые не меняют лагранжиан (1) в нулевом и первом порядках по малому параметру ϵ, однако допускают его изменения в порядке ϵ^2. По отношению к быстрому движению эти преобразования выполняют роль приближенных преобразований симметрии. Указанные преобразования задают структуру адиабатических течений, не возмущающих быстрые степени свободы, подобно тому, как упомянутые выше преобразования симметрии задавали структуру нейтральных течений. Если движение, соответствующее быстрым степеням свободы, устойчиво (а именно этот случай нас и интересует) и эти степени свободы не были возбуждены в исходном состоянии системы, то присутствие адиабатических течений в исходном состоянии не приведет к возбуждению быстрых степеней свободы в процессе дальнейшей эволюции в соответствии с принципом построения этих течений. Здесь полная аналогия с нейтральными течениями, которые не выводят устойчивую систему из стационарного состояния. Таким образом задача о редуцировании МГД уравнений сводится к отысканию структуры адиабатических течений и получению динамических уравнений для описания их эволюции. При этом важно отметить, что адиабатические преобразования общего вида должны включать в себя преобразования симметрии как подкласс, поскольку последние не меняют лагранжиан во всех порядках по ϵ. Поэтому в полученных таким путем редуцированных уравнениях симметрии исходных уравнений сохраняются автоматически.

Для упрощения дальнейших формул ограничимся рассмотрением систем с аксиально симметричными стационарными состояниями (типа токамак), то есть такими, в которых все физические величины (в частности, $\hat{\rho}$) в стационаре не зависят от ζ. Для таких систем скорость нейтральных течений можно записать в следующем виде [12]:

$$\mathbf{V}_0 = \kappa(\psi)\frac{\mathbf{B}}{\rho} - \Phi_0'(\psi)\mathbf{e}_\zeta = \frac{\mathbf{B}}{qJ}\left(\kappa\frac{qJ}{\rho} - \Phi_0'\right) + \frac{1}{qJ}\left[\nabla\zeta\times\nabla\Phi_0\right] , \tag{7}$$

где $\kappa(\psi)$, $\Phi_0(\psi)$ - произвольные функции, задающие поперечный профиль течения. Как видно из выражения (7), именно лагранжевы координаты позволяют адекватно описать структуру нейтральных течений. Поэтому естественно попытаться описать структуру адиабатических течений в терминах этих же координат. Наряду с реальными физическими величинами $\mathbf{B}$, ρ и p нейтральные течения не меняют базисные векторы $\nabla\psi$ и $\mathbf{e}_\zeta$. Однако остальные базисные векторы при наличии нейтральных течений зависят от времени даже в стационаре. Это неудобно для дальнейшего анализа. Поэтому ниже будем использовать несколько модифицированные (псевдолагранжевы) угловые координаты, удовлетворяющие условиям:

$$\dot{\psi} + \mathbf{v}\nabla\psi = 0 , \quad \dot{\theta} + \mathbf{v}\nabla\theta = 0 , \quad \dot{\zeta} + \mathbf{v}\nabla\zeta = 0 , \tag{8}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_0$. Такая замена переменных позволяет исключить из них секулярные по времени члены, связанные с присутствием нейтральных течений. При этом соотношения (5), (7) сохраняют свой вид, а в выражении (6) $\mathbf{V}$ заменяется на $\mathbf{v}$.

С учетом соотношений (5) доминирующий член в вариации лагранжиана (1) принимает вид

$$\mathbf{B}\delta\mathbf{B} = \frac{B^2}{q}\left(\mathbf{e}_\psi \nabla(q\delta\psi) + \mathbf{e}_\theta \nabla(q\delta\theta - \delta\zeta)\right) - \tag{9}$$

$$-J\mathbf{B}\cdot\mathbf{e}_\theta\left(\frac{q'}{q}\delta\psi + \frac{1}{qJ}(\mathbf{B}\nabla)(q\delta\theta - \delta\zeta)\right) - \mathbf{B}\cdot\mathbf{e}_\psi(\mathbf{B}\nabla\delta\psi)\ .$$

В выражении (9) доминирует первое слагаемое. Адиабатическое преобразование независимых переменных, обращающее это слагаемое в нуль, имеет вид

$$\delta\psi_a = \frac{1}{q}\,\mathbf{e}_\theta\nabla\delta\alpha\ , \qquad \delta\theta_a = -\frac{1}{q}\,\mathbf{e}_\psi\nabla\delta\alpha + \frac{\delta\zeta}{q}\ , \tag{10}$$

где $\delta\alpha$ и $\delta\zeta$ – произвольные функции координат и времени. По аналогии с работами [10-12] это преобразование можно записать в виде инфинитезимального вектора смещения:

$$\boldsymbol{\xi}_a = \frac{1}{qJ}\left[\nabla\zeta \times \nabla\delta\alpha\right] - \frac{1}{qJ}\,\mathbf{B}\delta\zeta\ . \tag{11}$$

Из сравнения с (7) легко видеть, что при $\delta\alpha = \Phi_0(\psi)\tau$ и $\delta\zeta = (\kappa qJ/\rho - \Phi_0')\tau$ преобразование (11) переходит в преобразование симметрии. Остаточный член в выражении (9) при адиабатическом преобразовании (11) принимает вид

$$\mathbf{B}\delta_a\mathbf{B} = \mathbf{B}\left[\nabla\zeta \times \nabla\,\frac{\mathbf{B}\nabla\delta\alpha}{qJ}\right] \tag{12}$$

и при $\mid \nabla_{\parallel}\delta\alpha \mid \sim \epsilon \mid \nabla_{\perp}\delta\alpha \mid$ имеет порядок ϵ^2. С учетом $\nabla_{\perp}qJ \sim \epsilon qJ/a$ получаем следующую оценку: $\mathrm{div}\boldsymbol{\xi}_a \sim \epsilon\ k_{\perp}\xi_a$. Тогда, полагая аналогично работам [1-8] $\beta/k_{\perp}a \sim \epsilon^2$, имеем: $\delta_a p \sim B^2 k_{\perp}\xi\beta/k_{\perp}a \sim O(\epsilon^2)$. Такой же порядок величины имеет и член $V^2\delta_a\rho$ в предположении $V \leq c_s$. Член $\rho\mathbf{V}\delta\mathbf{v}$ при произвольном (нередуцированном) движении имеет порядок ϵ, поскольку $\boldsymbol{\xi}$, вообще говоря, зависит от быстрого времени, так что $\delta\mathbf{v} \sim k_{\perp}C_A\xi$. Чтобы привести порядок малости этого члена в соответствие с порядком других редуцированных членов, рассмотрим $\delta_a\mathbf{v}$, которое с учетом $\delta\mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\xi}} + (\mathbf{v}\nabla)\boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi}\nabla)\mathbf{v}$ принимает вид

$$\delta\mathbf{v} = \frac{1}{qJ}\left[\nabla\zeta \times \nabla(\delta\dot{\alpha} + \mathbf{v}\nabla\delta\alpha)\right] - \frac{\mathbf{B}}{qJ}\left(\delta\dot{\zeta} + \mathbf{v}\nabla\delta\zeta\right)\ . \tag{13}$$

Величина $\delta_a\mathbf{v}$ имеет правильный порядок, если $\delta_a\dot{\alpha} + \mathbf{v}\nabla\delta_a\alpha \sim \epsilon k_{\perp}C_A\delta_a\alpha$, а $\delta_a\dot{\zeta} + \mathbf{v}\nabla\delta_a\zeta \sim \epsilon k_{\perp}C_A\delta_a\zeta$, то есть по отношению к быстрому движению функции $\delta_a\alpha$ и $\delta_a\zeta$ должны приближенно выполнять роль преобразования перемаркировки. По аналогии с нейтральными течениями [12] таким адиабатическим инфинитезимальным преобразованиям соответствуют адиабатические течения вида

$$\mathbf{v}_a = \frac{1}{qJ}\left[\nabla\zeta \times \nabla\phi\right] - \frac{1}{qJ}\,\mathbf{B}\dot{\zeta}\ , \tag{14}$$

не возбуждающие быстрых степеней свободы. При этом ϕ и $\dot{\zeta}$ - произвольные функции координат и медленного времени.

Выражение (14) задает общую структуру поля скоростей искомых редуцированных МГД уравнений. Сами уравнения могут быть получены из принципа наименьшего действия Гамильтона (см., например, [9,10,12]) путем подстановки в него "адиабатической" вариации лагранжиана (1). Обращение в нуль коэффициента при $\delta\zeta$ с учетом псевдолагранжевости ρ/qJ и $s = s(\psi)$ приводит к дифференциальному закону сохранения перекрестной спиральности (cross-helicity) $\chi = \mathbf{VB}$:

$$\partial_t \chi + \mathrm{div}\left\{\mathbf{V}\chi - \mathbf{B}\left(\frac{V^2}{2} - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}\right)\right\} = 0\,. \tag{15}$$

Этот закон сохранения справедлив также для исходной нередуцированной МГД-модели и может быть получен путем умножения уравнения движения на $\mathbf{B}/\rho$. В частности, из него следует первый из интегральных инвариантов (29) работы [12]. Обращение в нуль коэффициента при $\delta\alpha$ дает второе динамическое уравнение редуцированной МГД модели:

$$\partial_t \Omega^\zeta + \mathrm{div}\left\{\mathbf{V}\Omega^\zeta - \frac{\mathbf{B}}{\rho}\mathrm{div}[\mathbf{B}\times\nabla\zeta] - \frac{1}{\rho}[\nabla\zeta\times\nabla p] - \right.$$
$$\left. - [\mathbf{V}\times\nabla(\mathbf{V}_0\nabla\zeta)] + \left[\mathbf{B}\times\nabla\frac{qJ}{\rho}\right]\right\} = 0\,, \tag{16}$$

формально имеющее вид закона сохранения контравариантной ζ-компоненты завихренности $\Omega^\zeta = \nabla\zeta\cdot\mathrm{rot}\mathbf{V}$. Это уравнение также может быть получено как прямое следствие нередуцированного векторного уравнения движения, однако, в отличие от последнего, скалярная пара уравнений (15), (16) содержит только члены порядка ϵ^2 или выше. С учетом определений χ, $\mathbf{V}_0$ и ζ выражение (14) удобно переписать для полной скорости адиабатического движения:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{B^2}\left[\mathbf{B}\times\left(\nabla\Phi - \nabla\zeta\,\frac{\mathbf{B}\nabla\Phi}{qJ}\right)\right] + \mathbf{B}\,\frac{\chi}{B^2}, \tag{17}$$

где $\Phi = \phi + \Phi_0$ имеет смысл электрического потенциала, а соотношение

$$\partial_t \mathbf{A} = -\nabla\zeta\,\frac{(\mathbf{B}\nabla\Phi)}{qJ}$$

определяет адиабатическое изменение векторного потенциала.

Уравнения (15) – (17), заменяющие полное векторное уравнение движения, составляют основу предлагаемой редуцированной МГД модели. Эти уравнения похожи на соответствующие уравнения известных редуцированных моделей [1-8], однако в отличие от последних в уравнениях (15) – (17) сохранены симметрии исходной системы, поскольку преобразование симметрии является подклассом адиабатического преобразования (11). В частности, система (15)–(17) допускает стационарные состояния с течениями вида (7). В то же время, поле скоростей (17), в общем случае, не является подклассом точных решений исходной системы МГД уравнений. В этом смысле предлагаемая редуцированная МГД модель представляет собой новую, относительно независимую систему уравнений, и вопрос о полном наборе ее симметрий и соответствующих инвариантов требует дальнейшего исследования, выходящего за рамки данной работы. Отметим только, что второй интегральный инвариант полной системы МГД уравнений (см. выражение (29) работы [12])

$$I_2 = \int \eta(\psi)\rho\mathbf{V}\mathbf{e}_\zeta\, d^3\mathbf{r}, \tag{18}$$

как и следовало ожидать, является также инвариантом редуцированной системы (15) – (17) при произвольной $\eta(\psi)$.

В работах [1-8] величины $\mathbf{B}$, ρ и p, входящие в редуцированные уравнения движения, определялись из уравнений (2) – (4) с подстановкой в них выражения для редуцированного поля скоростей. Уравнение для $\mathbf{B}$ обычно приближенно интегрировалось с учетом относительно малого возмущения магнитного поля, однако при таком интегрировании, как правило, нарушалось условие $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$. Чтобы не вносить дополнительных погрешностей, связанных с неточным выполнением локальных законов сохранения (2) – (4), целесообразно использовать для $\mathbf{B}$, ρ и p выражения (5) как результат точного интегрирования, а скорость (17) подставлять в более простые уравнения (8) для определения ψ, θ, ζ. Наконец, выпишем явно уравнение, связывающее функции Φ и Ω^ζ:

$$\Omega^\zeta = \mathrm{div}\left\{\frac{qJ}{B^2}\nabla\Phi + [\mathbf{B}\times\nabla\zeta]\frac{\chi}{B^2} - \nabla\zeta\frac{(\mathbf{B}\nabla\Phi)}{B^2} - \mathbf{B}\left(\frac{\nabla\zeta\nabla\Phi}{B^2} - \frac{(\nabla\zeta)^2(\mathbf{B}\nabla\Phi)}{qJB^2}\right)\right\}. \tag{19}$$

В принципе, при решении конкретных задач в выражениях (17), (19) можно опустить ряд членов более высокого порядка малости. Однако это следует делать достаточно аккуратно, чтобы не нарушить самосогласованность полученной системы уравнений и присущие ей симметрии.

Таким образом, уравнения (15), (16), дополненные выражениями (5), (17) и уравнениями (8), (19), образуют замкнутую самосогласованную систему уравнений идеальной редуцированной магнитной гидродинамики, пригодную для описания относительно медленной (адиабатической) динамики тороидальной плазмы и, в частности, для анализа устойчивости стационарных состояний плазмы с течениями общего вида. В отличие от известных ранее аналогов [1-8] в полученной системе не нарушены симметрии исходной нередуцированной системы уравнений, что принципиально важно для анализа динамики плазмы с течениями, а также позволяет избежать накопления погрешностей при расчетах длительной эволюции возмущений.

Автор выражает признательность В.И.Ильгисонису за полезные обсуждения и конструктивную критику. Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 97-02-17238, 96-15-96815) и Международной ассоциации INTAS (грант INTAS-94-3802).

---

1. Б.Б.Кадомцев, О.П.Погуце, ЖЭТФ **65**, 575 (1973).
2. Б.Б.Кадомцев, О.П.Погуце, ЖЭТФ **66**, 2067 (1974).
3. R.White, D.Monticello, et al., 5-th Intern. Conf. on Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Res., Vienna, IAEA, 1975, vol.1, p. 495.
4. H.Strauss, Phys.Fluids **19**, 134 (1976).
5. H.Strauss, Phys.Fluids **20**, 1354 (1977).
6. H.Strauss, Nucl. Fusion **23**, 649 (1983).
7. R.D.Hazeltine, M.Kotschenreuther, and P.J.Morrison, Phys. Fluids **28**, 2466 (1985).
8. H.Strauss, J. Plasma Phys. **57**, 83 (1996).
9. W.Newcomb, Nucl. Fusion Suppl., Pt 2, 451 (1962).
10. В.И.Арнольд, *Математические методы классической механики*, М.: Наука, 1974.
11. В.И.Ильгисонис, В.П.Пастухов, Письма в ЖЭТФ **61b**, 186 (1995).
12. В.И.Ильгисонис, В.П.Пастухов, Физика плазмы **22**, 228 (1996).
13. В.И.Ильгисонис, В.П.Пастухов, ДАН **355**, 38 (1997).