Письма в ЖЭТФ, том 67, вып.11, стр.945 - 950 © 1998г. 10 июня

ИНДУЦИРОВАННОЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ ШУМОМ УСИЛЕНИЕ СЛАБЫХ СИГНАЛОВ В СИСТЕМЕ С ON-OFF-ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬЮ

О.В.Геращенко[1], *С.Л.Гинзбург*, *М.А.Пустовойт*

Санкт-Петербургский институт ядерной физики им. Б.П.Константинова РАН

188350 Ленинградская обл. Гатчина, Россия

Поступила в редакцию 19 марта 1998 г.

После переработки 27 апреля 1998 г.

Проведено теоретическое и экспериментальное изучение модели передемпфированного крамерсовского осциллятора при воздействии сильного мультипликативного гауссовского шума и слабого периодического сигнала. Показано, что такая система при определенных условиях демонстрирует on-off-перемежаемость и чувствительность к очень слабым периодическим сигналам, что дает возможность многократного (экспериментально – на два порядка) усиления амплитуды сигнала.

PACS: 02.50.-r, 05.40.+j, 05.45.+b, 84.30.-r

После открытия явления стохастического резонанса, в котором внешний аддитивный шум играет конструктивную роль, повышая соотношение сигнал – шум, большой интерес вызывает изучение влияния шума на поведение различных динамических систем. Нами теоретически и экспериментально показана возможность усиления слабых сигналов в нелинейной динамической системе с мультипликативным шумом.

В данной работе мы рассмотрим влияние слабого периодического сигнала на передемпфированный крамерсовский осциллятор [1, 2] с мультипликативным шумом. Запишем стохастическое уравнение по Стратоновичу для такой системы:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - Ux^3 + \beta\xi(t)x + AR(t) + \sigma\phi(t), \tag{1}$$

где $\xi(t)$ и $\phi(t)$ – δ-коррелированные статистически независимые случайные процессы, $R(t)$ – периодический прямоугольный сигнал с нулевым средним и единичной амплитудой.

Аналитическое исследование и численное моделирование уравнения (1) проведено в работе [3], где показано, что система при малых значениях параметра $\alpha = 2\lambda/\beta^2$ обладает сверхчувствительностью к слабым переменным сигналам, когда чрезвычайно малое воздействие порядка $\exp(-1/|\alpha|)$ вызывает отклик системы порядка единицы.

Запишем уравнение Фоккера–Планка для стохастического уравнения (1) :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left((\lambda + \frac{\beta^2}{2})x - Ux^3 + AR(t)\right)F\right\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{(\beta^2x^2 + \sigma^2)F\right\}. \tag{2}$$

В адиабатическом приближении, когда период сигнала $R(t)$ много больше времени установления стационарной плотности вероятности $F(x)$, решение уравнения (2) в

[1] e-mail: gerashch@hep486.pnpi.spb.ru

случае $(A,\ \sigma) \ll (\lambda,\ \beta,\ U)$ выглядит следующим образом:

$$F(x) = C\left(x^2 + \frac{\sigma^2}{\beta^2}\right)^{(\alpha-1)/2} \exp\left\{\frac{2AR(t)}{\beta\sigma}\arctan\frac{\beta x}{\sigma} - \frac{Ux^2}{\beta^2}\right\}, \tag{3}$$

$$\alpha = \frac{2\lambda}{\beta^2},$$

где C – нормировочная постоянная. Таким образом, α является основным параметром, определяющим поведение системы.

В случае, когда малый сигнал много больше аддитивного шума ($\sigma \to 0$), из (3) получим:

$$F(x) = C|x|^{\alpha-1}\theta\big(\mathrm{sign}(AR(t)x)\big)\exp\left\{-\frac{2AR(t)}{\beta^2 x} - \frac{Ux^2}{\beta^2}\right\}, \tag{4}$$

где θ – единичная функция Хевисайда. Нормировочный множитель C точно не вычисляется, а его асимптотики при $|\alpha| \ll 1$ и $U/\beta^2 \sim 1$ имеют вид

$$C = \begin{cases} \alpha & \alpha > 0, z \gg 1 \\ 1/\ln\frac{1}{A} & z \ll 1 \\ |\alpha|A^{|\alpha|} & \alpha < 0, z \gg 1 \end{cases},$$

$$z = |\alpha|\ln\frac{1}{A}.$$

Смена асимптотик (кроссовер) здесь происходит, когда параметр $z \sim 1$, то есть при амплитуде сигнала $A_0 = \exp(-1/|\alpha|)$. Таким образом, при малых значениях α очень слабый сигнал способен кардинально менять плотность распределения.

Отметим характерные черты решения (4) в практически важном случае $|\alpha| \ll \ll 1$: во-первых, степенная зависимость плотности вероятности в широком интервале изменения x, что характерно для явления on-off-перемежаемости [2, 4, 5]; во-вторых, "чувствительность" к знаку сигнала $R(t)$ при его амплитуде $A > A_0$. Чтобы оценить амплитуду выходного сигнала, вычислим первый момент $F(x)$:

$$< x(t) >= \begin{cases} R(t)\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{\pi}{U}}/\ln\frac{1}{A}, & z \ll 1,\ |\alpha| \ll 1 \\ R(t)\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{\pi}{U}}|\alpha|A^{|\alpha|}, & z \gg 1,\ \alpha < 0,\ |\alpha| \ll 1 \end{cases}. \tag{5}$$

Выражение для коэффициента усиления при $|\alpha| \ll 1$ имеет вид

$$K = \frac{< x(t) >}{AR(t)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{4U}}\beta/A\ln\frac{1}{A}, & z \ll 1 \\ \sqrt{\frac{\pi}{4U}}\beta|\alpha|/A^{1-|\alpha|}, & z \gg 1,\ \alpha < 0 \end{cases}. \tag{6}$$

Кроме того, можно показать, что качественно поведение системы не зависит от вида нелинейности в уравнении (1) (квадратичная, кубическая, экспоненциальная и т.п.).

На рис.1 приведена аналоговая схема, моделирующая уравнение (1). Она представляет собой параллельно соединенные конденсатор, нелинейный элемент из встречно включенных полупроводниковых диодов и элемент с управляемой напряжением $V_c(t)$ отрицательной проводимостью $G(t)$, реализованный на операционном усилителе и полевом транзисторе. Управляющее напряжение $V_c(t) = V_{c0} + v_n(t)$ подается на затвор полевого транзистора и является суммой постоянного и шумового

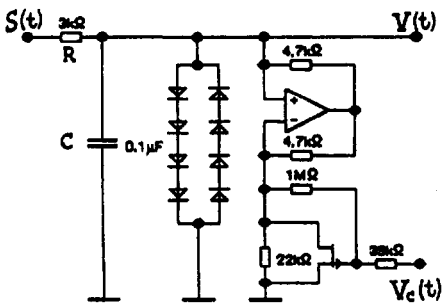

Рис.1. Аналоговая электронная схема, моделирующая уравнение (1). Диоды – кремниевые типа Д107, операционный усилитель – КР544УД1, полевой транзистор – КП103К

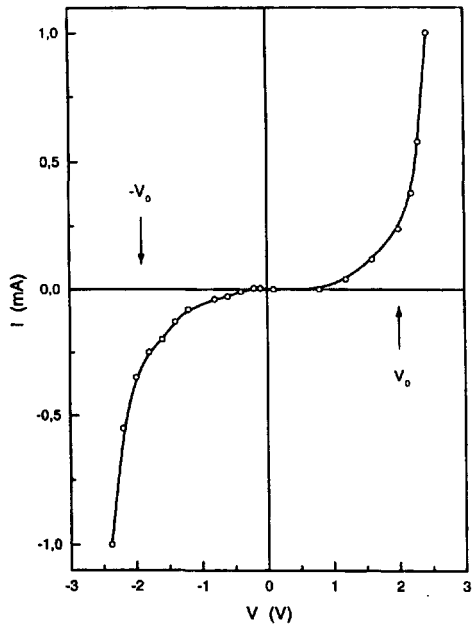

Рис.2. Статическая ВАХ электронной схемы, изображенной на рис. 1. Напряжение отсечки $|V_0| \approx 2$ В

напряжений. Шумовое напряжение в $V_c(t)$ задавалось от генератора "белого" шума с частотой отсечки около 30 кГц и $< v_n(0)v_n(t) >= V_n^2 \exp(-\Gamma|t|)$, $V_n \approx 1.5$ В. При этом $\Gamma \approx 2 \cdot 10^{-5}\,\text{с}^{-1}$. Входной прямоугольный сигнал $S(t)$ с нулевым средним, амплитудой A и периодом $T = 2$ с подавался через резистор R. Статическая вольт-амперная характеристика (ВАХ) всей схемы в целом показана на рис.2. Видно, что при $|V| < 1$ В наклон ВАХ близок к нулю. В ВАХ имеется некоторая асимметрия для $V < 0$ и $V > 0$, которая возникает из-за технологического разброса параметров полупроводниковых диодов. Из ВАХ можно определить напряжение отсечки $|V_0| \approx 2$ В. При $|V| > V_0$ нелинейность ВАХ $I_1(V)$ приводит к отсечке $V(t)$ на уровне около 2.5 В.

Запишем уравнение для этой схемы.

$$\frac{S(t) - V(t)}{R} = C\frac{dV}{dt} + I_1(V) + I_2(V), \tag{7}$$

где $V(t)$ – выходное напряжение, CdV/dt – ток через конденсатор, $I_1(V)$ – ток через нелинейный элемент на встречно включенных полупроводниковых диодах, который имеет вид

$$I_1(V) = I_0\Big(\exp(bV) - \exp(-bV)\Big), \qquad b \sim 1/V_0.$$

Ток через элемент с отрицательной проводимостью в нашем диапазоне напряжений можно записать в следующем виде:

$$I_2(V) = G(t)V, \qquad G(t) = -|G_0| - g(t),$$

где $g(t) = \gamma v_n(t)$ – флуктуирующая проводимость, $\gamma \approx 10^{-3}/(\text{Ом}\cdot\text{В})^{-1}$. Тогда получим:

$$RC\frac{dV}{dt} = \lambda V - f(V) + g(t)V + S(t), \tag{8}$$

$$\lambda = R(|G_0| - R^{-1} - G_L), \quad f(V) = R\Big(I_1(V) - G_L V\Big).$$

G_L определена так, чтобы в $f(V)$ не было линейного по V члена. Видно, что шум в уравнение (8) входит мультипликативно, то есть умножается на V. Поскольку $G(t)$ зависит от управляющего напряжения $V_c(t)$, то, подбирая величину G_0 при помощи постоянного напряжения в $V_c(t)$, можно добиться, чтобы коэффициент λ в (8) был близок к нулю. Из наклона ВАХ на рис. 2 можно определить $\lambda \approx -0.1$ для $|V| \leq 1$ В, $RC = 3 \cdot 10^{-4}$ с.

Перейдем в уравнении (8) к безразмерному времени $\tau = t/RC$:

$$\frac{dV}{d\tau} = \lambda V - f(V) + \beta\xi(\tau)V + S(\tau), \tag{9}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{\Gamma RC}}R\gamma V_n \approx 0.8, \quad \alpha = \frac{2\lambda}{\beta^2} \approx -0.3.$$

Таким образом, видно, что уравнение (9) совпадает с (1), отличаясь только видом нелинейности, что для наших явлений не существенно.

Подчеркнем основные черты нашей модели: во-первых, уравнение является принципиально нелинейным, поскольку коэффициент при линейном члене стремится к нулю; во-вторых, шум умножается на динамическую переменную V, то есть является мультипликативным.

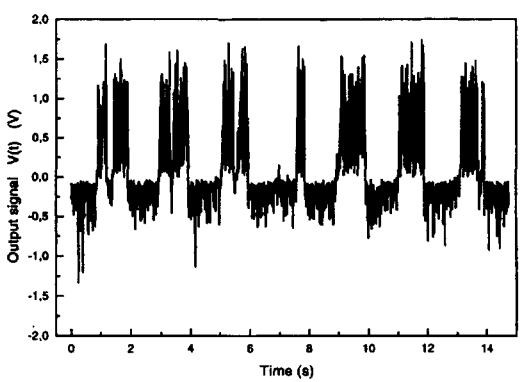

Рис.3. Выходное напряжение $V(t)$ для случая, когда на вход схемы подается прямоугольный сигнал с амплитудой $A = 3$ мВ и периодом 2 с. Коэффициент усиления $K \approx 90$

На рис.3 показано выходное напряжение $V(t)$, когда на вход схемы подается прямоугольный сигнал с амплитудой $A = 3$ мВ. Отметим, что несимметричность выбросов в положительную и отрицательную сторону связана с асимметрией ВАХ схемы в области напряжений $V < 0$ (см. рис. 2).

Видно, что на малый входной сигнал система реагирует "выбросами" до отсечки $|V_0| \approx 2$ В и, тем самым, усиливает его. Такое поведение характерно для явления on-off-перемежаемости, когда система, находясь в ламинарной фазе, внезапно возбуждается до отсечки и снова переходит в ламинарную фазу. Характерным признаком on-off-перемежаемости является степенное поведение плотности распределения

вероятности длины ламинарной фазы [6–8]:

$$P_{lam}(n) \sim n^{-3/2}, \tag{10}$$

где n – длина ламинарного участка.

Экспериментально ламинарная фаза определялась следующим образом: в реализации $V(t)$ находился максимальный выброс $V_{max} \approx 2.5$ В, задавался порог ламинарности p в долях V_{max}, ламинарная фаза $V(t)$ определялась условием $V(t) < pV_{max}$. На рис.4 приведена зависимость $P_{lam}(n)$ для постоянного входного сигнала $S(t) = E = -14$ мВ и порога ламинарности $p = 0.1$, которая хорошо согласуется с теоретической (10). Отметим, что зависимость (10) наблюдалась также и для $E > 0$ и при других порогах ламинарности ($p = 0.05,\ 0.2,\ 0.5$).

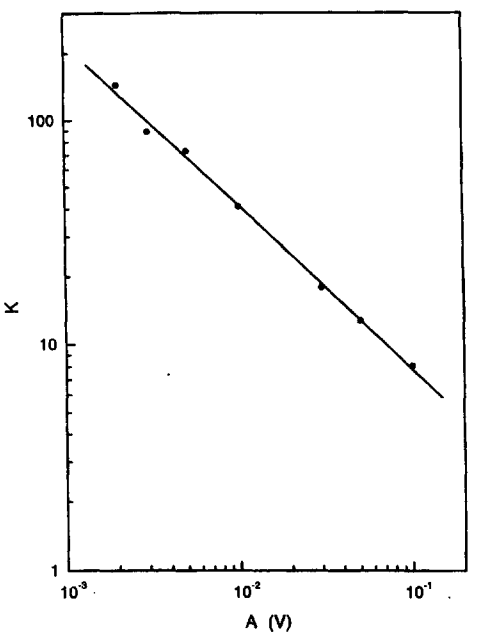

Рис.4. Плотность распределения вероятности длины ламинарной фазы при постоянном входном сигнале $E = -14$ мВ и пороге ламинарности $p = 0.1$. Прямая проведена с наклоном $-3/2$

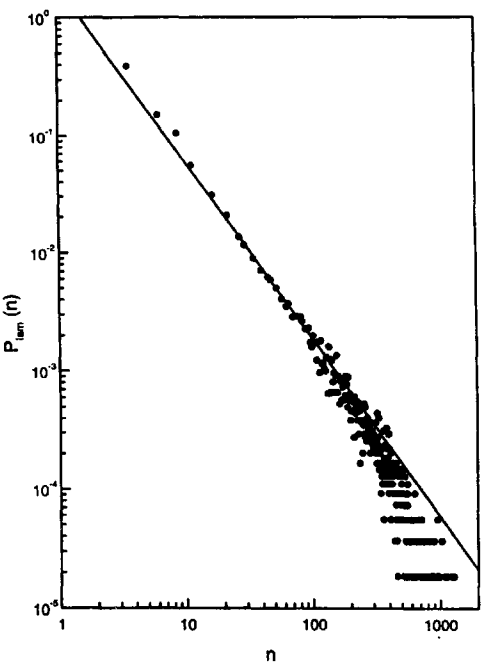

Рис.5. Зависимость коэффициента усиления от амплитуды входного прямоугольного сигнала с периодом 2 с. Прямая проведена с наклоном около -0.8

На рис.5 приведена зависимость коэффициента усиления от амплитуды входного сигнала $K(A) = \sqrt{S_V(f_0)\Delta f}/A$, где $S_V(f_0)$ - спектральная интенсивность первой гармоники выходного сигнала, $\Delta f = 0.1$ Гц – шаг по частоте при измерении $S_V(f)$. Из наклона прямой можно определить величину $\alpha \approx -0.2$ в (3), что хорошо согласуется с оценкой в (9). Отличие α от нуля связано с асимметрией ВАХ в области отрицательных V (см. рис. 2), что приводит к меньшему усилению для $V < 0$.

Таким образом, экспериментально показана возможность усиления слабого периодического сигнала в аналоговой модели (8) уравнения (1) при помощи сильного мультипликативного шума.

В заключение необходимо отметить, что когда сигнал $S(t)$ подается на аналоговую модель (8) уравнения (1) в сумме с внешним "белым" аддитивным шумом $\sigma\phi(t)$, не зависимым от $\xi(t)$, причем в полосе частот порядка 1 МГц напряжение шума порядка амплитуды сигнала A, то схема работает как фильтр низких частот, обрезая частоты $f > f_c$ в спектре входного сигнала. Поэтому высокочастотные спектральные составляющие входного шума не оказывают влияния на выходной сигнал $V(t)$. Измерения спектра выходного сигнала $S_V(f)$ позволили определить величину частоты $f_c \approx 20$ Гц.

Таким образом, нами экспериментально продемонстрировано, что простая стохастическая система (8) с on-off-перемежаемостью, аналогичная системе (1), при малых абсолютных значениях параметра α обладает индуцированной шумом чувствительностью к слабым переменным сигналам, обеспечивая их усиление и являясь, таким образом, примером конструктивной роли шума в природе.

Работа поддержана Государственной программой "Физика квантовых и волновых процессов", подпрограмма "Статистическая физика", проект VIII-3, а также Государственной программой "Нейтронные исследования вещества".

---

1. W.Horsthemke and R.Lefever, *Noise-induced phase transitions*, Springer, N.Y., 1984.
2. H.L.Yang and E.J.Ding, Phys.Rev. **E54**, 1361 (1996).
3. S.L.Ginzburg and M.A.Pustovoit, Phys.Rev.Lett, submitted.
4. A.S.Pikovsky, Phys.Lett. **A165**, 33 (1992).
5. A.S.Pikovsky and P.Grassberger, J.Phys. **A24**, 4567 (1991).
6. N.Platt, E.A.Spiegel, and C.Tresser, Phys.Rev.Lett. **70**, 279 (1993).
7. J.F.Heagy, N.Platt, and S.M.Hammel, Phys.Rev. **E49**, 1140 (1994).
8. N.Platt, S.M.Hammel, and J.F.Heagy, Phys.Rev.Lett. **72**, 3498 (1994).