Письма в ЖЭТФ, том 73, вып. 9, с. 565 – 569 © 2001 г. 10 мая

Редукция модели XXZ с обобщенными периодическими граничными условиями

А. А. Белавин[1], *С. Ю. Губанов*[1]

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 29 марта 2001 г.

Рассмотрена модель XXZ с обобщенными периодическими граничными условиями. Проанализирован способ вычисления спектра энергии, исходя из функционального уравнения на трансфер матрицу. В явном виде получены собственные значения гамильтониана.

PACS: 05.50.+q

Введение. Одной из самых простых моделей, описывающих одномерный кристалл, является цепочка двухуровневых атомов со взаимодействием ближайших соседей [1], предложенная Гейзенбергом еще в 1926 г. Гамильтониан анизотропной модели Гейзенберга – Изинга (модели XXZ) имеет следующий вид:

$$H_{XXZ} = 2J \sum_{n=1}^{N} \left(\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + \Delta\ \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z \right), \tag{1}$$

где J есть обменный интеграл Слетера, Δ – коэффициент анизотропии (в нашем случае $\Delta = \frac{1}{2}(q+q^{-1}) \equiv \equiv \cos(\eta)$, $q = e^{i\eta}$). В 1931 г. Бете предложил способ, позволяющий найти собственные векторы и собственные значения гамильтониана, и, тем самым, полностью решить задачу. Для этого необходимо решить трансцендентные уравнения Бете. В данной работе мы показываем, как можно в случае обобщенных периодических граничных условий получить явное выражение для спектра энергии, не решая при этом трансцендентных уравнений анзаца Бете.

Обобщенные периодические (*твистованные*) граничные условия таковы:

$$\sigma_{N+1}^{\pm} = q^{\pm 2\beta} \sigma_1^{\pm}, \quad \sigma_{N+1}^z = \sigma_1^z, \tag{2}$$

где $\sigma^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma^y)$. Проекция спина на ось z сохраняется: $S^z = \frac{1}{2}\sigma_1^z + \ldots + \frac{1}{2}\sigma_N^z$, $[S^z, H_{XXZ}] = 0$. Энергии цепочек с разными параметрами твиста связаны друг с другом следующим образом [2]: спектр энергии в цепочке с параметром твиста β из сектора с $S^z = \beta - 1$ содержит в себе спектр энергии цепочки с параметром твиста $\beta - n$ из сектора $S^z = \beta - 1 + n$, где n – целое число:

$$E^{(\beta)}_{S^z=\beta-1} = E^{(\beta-n)}_{S^z=\beta-1+n}. \tag{3}$$

Это происходит благодаря наличию квантово-групповой симметрии $U_q(sl(2))$. Мы говорим "спектр содержит в себе", потому что в секторе $S^z = \beta - 1 + n$ меньше векторов, чем в секторе с $S^z = \beta - 1$.

Модель XXZ связана с двумерной классической статистической решеточной шестивершинной моделью (моделью льда). Физические системы, для описания которых пригодна эта модель: кристалл льда H_2O, сегнетоэлектрик PO_4H_2K, антисегнетоэлектрик $PO_4H_2NH_4$. Это двумерная идеализация кристалла, пары атомов которого или соседние радикалы связаны "водородной связью". В окрестности каждого узла имеется не более двух ионов H^+. В кристалле льда каждый атом кислорода имеет 4 связи с соседними атомами кислорода, расположенных в вершинах тетраэдра, что дает 6 конфигураций по отношению к решетке (Онсагер, Дюпьи, 1960). Гамильтониан модели XXZ связан с трансфер матрицей шестивершинной модели $\hat{t}_{1/2}(u)$ следующим равенством:

$$H_{XXZ} = -\frac{N}{2}\cos(\eta) + \sin(\eta)\frac{d}{du}\log \hat{t}_{1/2}(u)|_{u=0}. \tag{4}$$

Гамильтониан и трансфер матрица коммутируют между собой, следовательно, имеют одну и ту же систему собственных векторов. В данной работе мы в первую очередь найдем собственные значения трансфер матрицы, а затем спектр энергии по формуле (4).

Существует бесконечное семейство трансфер матриц $t_j(u)$, где $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$. Они коммутируют между собой. А также удовлетворяют бесконечной системе рекуррентных функциональных соотношений слияния [3 – 5]:

[1]e-mail: belavin@itp.ac.ru; gubanov@itp.ac.ru

$$\hat{t}_{1/2}(u-(j+1/2)\eta)\hat{t}_j(u) =$$
$$= t_0(u-(j+1)\eta)\hat{t}_{j-1/2}(u+\eta/2) +$$
$$+ t_0(u-j\eta)\hat{t}_{j+1/2}(u-\eta/2), \qquad (5)$$

где $t_0(u) = \sin^N(u+\eta/2)$. В данной работе мы доказываем, что при параметре анизотропии, равном корню из единицы $q^{p+1} = -1$, трансфер матрица со спином $j = p/2$ имеет нулевые собственные значения на собственных бетевских векторах, если на параметр твиста β и сектор $S^z = s$ наложены определенные условия. Обращение собственного значения $t_{p/2}(u)$ в нуль приводит к тому, что бесконечная система функциональных соотношений слияния (5) обрывается и превращается в *функциональное уравнение* на $t_{1/2}(u)$. Решив это функциональное уравнение, мы найдем $t_{1/2}(u)$ и значение энергии по формуле (4). Обозначим символом V_p всю совокупность бетевских собственных векторов, на которых $t_{p/2}(u)$ имеет нулевые собственные значения. Ограничение модели XXZ на пространство V_p мы называем *редукцией модели* XXZ. Как было показано в [2], термодинамический предел таким образом редуцированной модели XXZ совпадает с минимальной моделью конформной теории поля с центральным зарядом $c = 1 - 6/p(p+1)$, что делает особенно интересным данное рассмотрение. Спектр энергии редуцированной модели XXZ можно вычислить, решив функциональные уравнения на трансфер матрицу шестивершинной модели.

Нулевые собственные значения. Рассмотрим $T-Q$-уравнение Бакстера $(t(u) \equiv t_{1/2}(u))$

$$t(u)Q(u) = q^{-\beta} t_0(u+\eta/2)Q(u-\eta) +$$
$$+ q^{\beta} t_0(u-\eta/2)Q(u+\eta), \qquad (6)$$

где $t_0(u) = \sin^N(u+\eta/2)$. Согласно работе [6], это уравнение полезно рассматривать как дискретную версию дифференциального уравнения второго порядка [7]. В таком случае, кроме функции $Q(u)$, у него должно быть второе линейно независимое решение $P(u)$ с тем же самым собственным значением трансфер матрицы $t(u)$. Можно выразить собственные значения трансфер матрицы через собственные значения оператора Бакстера $Q(u)$ и оператора $P(u)$:

$$t_j(u) = q^{(2j-1)\beta} f(u-(j-1/2)\eta) \times$$
$$\times [Q(u-(j+1/2)\eta)P(u+(j+1/2)\eta) -$$
$$- Q(u+(j+1/2)\eta)P(u-(j+1/2)\eta)], \qquad (7)$$

где функция $f(u)$ является квазипериодической функцией:

$$f(u+\eta) = q^{-2\beta} f(u) \qquad (8)$$

и введена ради удобства (можно было ввести $\tilde{P}(u) = f(u)P(u)$).

Рассмотрим случай, когда параметр анизотропии равен корню из единицы, $q^{p+1} = -1$, где p – некоторое натуральное число. Для трансфер матрицы в представлении со спином $j = p/2$ имеем

$$t_{p/2}(u+\pi/2) =$$
$$= (-1)^{\beta} f(u)[P(u+\pi)Q(u) - P(u)Q(u+\pi)], \qquad (9)$$

откуда немедленно следует, что в том случае, когда функции $Q(u)$ и $P(u)$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{P(u+\pi)}{P(u)} = \frac{Q(u+\pi)}{Q(u)}, \qquad (10)$$

собственное значение трансфер матрицы $t_{p/2}(u)$ обращается в нуль.

Мы можем выразить функцию $P(u)$ через $Q(u)$. А именно, если мы выполним разложение

$$\frac{t_0(u)}{Q(u+\eta/2)Q(u-\eta/2)} =$$
$$= R(u) + q^{\beta}\frac{A(u+\eta/2)}{Q(u+\eta/2)} - q^{-\beta}\frac{A(u-\eta/2)}{Q(u-\eta/2)}, \qquad (11)$$

где $R(u)$ есть тригонометрический полином степени $N-2n$, однозначно определяемый по известным тригонометрическим полиномам $t_0(u)$ и $Q(u)$; $A(u)$ соответственно имеет степень меньше n. (Целое число n связано с собственным значением $S^z = s$ в рассматриваемом секторе $n = N/2 - s$.) Затем выполним еще одно разложение:

$$R(u) = q^{\beta} F(u+\eta/2) - q^{-\beta} F(u-\eta/2); \qquad (12)$$

тогда, как нетрудно проверить, функция $P(u)$ будет определяться выражением

$$P(u) = \frac{1}{f(u)}(Q(u)F(u) + A(u)). \qquad (13)$$

Анализ этого выражения приводит к ограничению на значение параметра твиста β в граничных условиях модели XXZ:

$$(-1)^{2\beta} = (-1)^N. \qquad (14)$$

Если длина спиновой цепочки атомов *четная*, то число β должно быть *целым*, если длина *нечетная*, то *полуцелым.* При других значениях β исследуемого нами обрыва функциональных соотношений не произойдет. Условием существования разложения (12) функции $R(u)$ на $F(u)$, при котором функция $F(u)$ при сдвиге аргумента $u \to u + \pi$ будет вести себя точно так же, как и $R(u)$, является неравенство

$$\prod_{m=-s}^{+s} \sin(\pi \frac{m+\beta}{p+1}) \neq 0 \tag{15}$$

(поскольку это произведение появляется в знаменателе $F(u)$). Переменная m пробегает либо целые, либо полуцелые числа от $-s$ до $+s$. В зависимости от четности длины цепочки числа β и s одновременно целые или полуцелые, поэтому их сумма или разность – целое число. Условие (15) будет выполнено, если

$$|s| < \min(\beta,\ p+1-\beta) \mod (p+1). \tag{16}$$

Таким образом, анализируя второе линейно независимое решение уравнение Бакстера, мы приходим к следующему выводу: ***при параметре анизотропии, равном корню из единицы $q^{p+1} = -1$, трансфер матрица со спином $j = p/2$ в секторе $S^z = s$ имеет нулевые собственные значения, если выполнены условия (14) и (16).***

Алгебраическая структура. В предыдущем разделе мы доказали факт существования векторов, при ограничении на которые функциональные соотношения (5) обрываются и превращаются в замкнутую систему уравнений на собственные значения трансфер матрицы $t_{1/2}(u)$. В этом разделе мы перечислим все векторы из пространства состояний модели, которые удовлетворяют данному условию.

Во Введении мы сказали, что связь (3) между энергиями цепочек с разными параметрами твиста β осуществляется благодаря наличию квантовогрупповой симметрии $U_q(sl(2))$. Генераторами этой симметрии являются операторы S^z, X и X^t, где

$$X = \sum_{n=1}^{N} q^{\frac{1}{2}(\sigma_1^z+\ldots+\sigma_{n-1}^z)} \sigma_n^+ q^{-\frac{1}{2}(\sigma_{n+1}^z+\ldots+\sigma_N^z)} \tag{17}$$

(при $q^{p+1} = -1$, как нетрудно проверить, $X^{p+1} = 0$). Оператор X, действуя на вектор из сектора $S^z = s$, переводит его в вектор из сектора $S^z = s+1$: $[S^z, X] = X$. Действуя на гамильтониан, получаем

$$X\, H_{XXZ}^{(\beta)} - H_{XXZ}^{(\beta-1)}\, X = (\ldots)(1 - q^{2(S^z-\beta+1)}), \tag{18}$$

что доказывает соотношение (3).

Трансфер матрица шестивершинной модели, связанная с рассматриваемым гамильтонианом модели XXZ, выражается через диагональные элементы матрицы монодромии $L_k^n(u)$:

$$t_j(u) = \sum_{n=1}^{2j+1} q^{-2\beta(j+1-n)} L_n^n(u). \tag{19}$$

Используя уравнение Янга – Бакстера, точно так же, как это было сделано в работе [8], можно получить перестановочные соотношения между матричными элементами матрицы монодромии и операторами S^z и X:

$$\begin{aligned} q^{S^z} L_k^n &= q^{n-k} L_k^n q^{S^z}, \\ X L_k^n(u) &= q^{2(j+1)-n-k} L_k^n(u) X + \\ &+ \omega_{k-1} e^{+iu} q^{j+1-n} L_{k-1}^n(u) q^{-S^z} - \\ &- \omega_n\, e^{+iu} q^{j+2-k} L_k^{n+1}(u) q^{+S^z}, \end{aligned} \tag{20}$$

где $\omega_n = \sqrt{[n]_q[2j+1-n]_q}$ и использовано стандартное обозначение $[x]_q = (q^x - q^{-x})/(q - q^{-1})$. Перестановочные соотношения (20) позволяют выразить саму трансфер матрицу через оператор X. Приведем без доказательства выведенную нами нетривиальную формулу для трансфер матрицы со спином $j = p/2$ в секторе $S^z = s$:

$$t_{p/2}(u) = \sum_{r,k=0}^{p} X^r \hat{M}_{rk} X^k. \tag{21}$$

В этой формуле оператор $\hat{M}_{rk}$ есть

$$\begin{aligned} \hat{M}_{rk} &= (-1)^r \omega^{-1} e^{-ipu} q^{-2s-(2\beta+1-r-k)p/2-2k} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{p} q^{(2(\beta-s)+r-k)n} C_r^n C_k^{p-n} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{p-r-k} \lambda_{m,p-r-k} (L_{p/2})(u)^1_{p-r-k-m} X^{p-r-k-m}. \end{aligned} \tag{22}$$

Введены обозначения: $\omega = \prod_{k=1}^{2j} \omega_k$, числа C_n^N есть q-биномиальные коэффициенты:

$$C_n^N = \frac{1}{[n]_q!}[N]_q[N-1]_q \ldots [N+1-n]_q = \frac{[N]_q!}{[n]_q![N-n]_q!},$$

величины $\lambda_{m,p-r-k}$ определяются по формуле

$$\lambda_{m,m'} = \\ = e^{imu} q^{p/2+1+s+(m'-m)(m'+s-3p/2-1)} C_m^{m'} \prod_{l=1}^{m} \omega_{m'-l}.$$

Как видно из (21) трансфер матрица $t_{p/2}(u)$ выражается через сумму мономов вида $X^r\hat{M}_{rk}X^k$. Рассмотрим, при каких целых числах r и k оператор $\hat{M}_{rk}$ отличен от нуля в случае $q^{p+1}=-1$. Оператор $\hat{M}_{rk}$ пропорционален следующей сумме q-биномиальных коэффициентов:

$$f_{rk}\equiv\sum_{n=0}^{p}C_r^nC_k^{p-n}q^{n(2l+r-k)}, \qquad (23)$$

где $l=\beta-s$. К сожалению, нам не удалось получить выражение для коэффициентов f_{rk} в замкнутом виде. Поэтому мы проанализировали сумму (23) численным способом. Гипотеза, которую мы проверили численно, состоит в том, что при $q^{p+1}=-1$ коэффициенты f_{rk} отличны от нуля только в следующей замкнутой области: $r+k\le p$ и либо $r>p-l$, либо $k>l-1$. Следовательно, трансфер матрица $t_{p/2}(u)$ представима в виде

$$t_{p/2}(u)=X^{p+1-l}(\ldots)\;+\;(\ldots)X^l, \qquad (24)$$

а значит, обращается в нуль на когомологиях

$$V_{p,l}=\mathrm{Ker}\,X^l/\,\mathrm{Im}\,X^{p+1-l}. \qquad (25)$$

То есть нулевые собственные значения на таких собственных векторах v из сектора $S^z=s$, которые: во-первых, уничтожаются оператором X^l:

$$X^lv=0, \qquad (26)$$

во-вторых, сами не могут быть представлены в виде $X^{p+1-l}\chi$, где χ – какой-либо другой вектор:

$$v\ne X^{p+1-(\beta-s)}\chi. \qquad (27)$$

Таким образом, мы перечислили все векторы, на которых трансфер матрица $t_{p/2}(u)$ имеет нулевые собственные значения, и на которых, следовательно, как было сказано выше, рекуррентная система (5) превращается в замкнутую систему уравнений на собственные значения трансфер матрицы $t_{1/2}(u)$.

Вычисление собственных значений. Найдем собственные значения трансфер матрицы и гамильтониана в случае $q^4=-1$. Имеем

$$t_{3/2}(u)=0, \qquad (28)$$

$$t_{1-j}(u)=-(-1)^{\frac{N}{2}+\beta-s}t_j(u+\pi/2).$$

Для упрощения вычислений введем функцию $S_N(u)\equiv(-2)^{N/2}t_{1/2}(u-\eta/2)$. Функциональные соотношения принимают вид

$$S_N(u+\frac{\pi}{8})S_N(u-\frac{\pi}{8})=$$
$$=\cos^N(2u)-(-1)^{-\frac{N}{2}+l}\sin^N(2u). \qquad (29)$$

В это уравнение входят числа N и $l=\beta-s$, в зависимости от того, четные они или, нечетные, мы получаем четыре различных уравнения. Соответственно, находим четыре различных решения:

$$S_{4M}^{\{n\}}(u)=$$
$$=\prod_{m=1}^{M}(1+(-1)^{n_m}\cos(\pi\frac{2m-1}{4M})\cos(4u)),$$
$$S_{4M+2}^{\{n\}}(u)=\sin(2u)\sqrt{2}\prod_{m=1}^{M}(1+(-1)^{n_m}\times$$
$$\times\cos(\pi\frac{2m}{4M+2})\cos(4u)), \qquad (30)$$
$$S_{4M-1}^{\{n\}}(u)=e^{-iu}(-i)^{M-1/2}\times$$
$$\times\prod_{m=1}^{2M-1}(e^{(-1)^{n_m}\frac{i\pi m}{4M-1}}\sin(2u+\frac{\pi}{4})-$$
$$-ie^{-(-1)^{n_m}\frac{i\pi m}{4M-1}}\sin(2u-\frac{\pi}{4})),$$
$$S_{4M+1}^{\{n\}}(u)=e^{-iu}(-i)^{M}\times$$
$$\times\prod_{m=1}^{2M}(e^{(-1)^{n_m}\frac{i\pi m}{4M+1}}\sin(2u+\frac{\pi}{4})-$$
$$-ie^{-(-1)^{n_m}\frac{i\pi m}{4M+1}}\sin(2u-\frac{\pi}{4})),$$

где множество $\{n_m\}$ есть любой набор чисел, равных 0 или 1, например, $\{0,1,0,\ldots,0,1\}$. Мы интерпретируем эти числа как фермионные числа заполнения. Написанные функции удовлетворяют уравнению

$$S_{4M+\delta}(u+\frac{\pi}{8})S_{4M+\delta}(u-\frac{\pi}{8})=$$
$$=\cos^{4M+\delta}(2u)+i^{-\delta}\sin^{4M+\delta}(2u). \qquad (31)$$

Таким образом, мы нашли решения только для случая, когда $\beta-s$ есть нечетное число. Для собственных значений энергии получаем

$$\frac{E_{4M}^{\{n\}}}{4J} = -\frac{4M}{2\sqrt{2}} - \\ - \frac{4}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{M} (-1)^{n_m} \cos(\pi\frac{2m-1}{4M}),$$

$$\frac{E_{4M+2}^{\{n\}}}{4J} = -\frac{4M+1}{2\sqrt{2}} + \\ + \frac{2}{\sqrt{2}} \left(1 - 2\sum_{m=1}^{M} (-1)^{n_m} \cos(\pi\frac{m}{2M+1})\right),$$

$$\frac{E_{4M-1}^{\{n\}}}{4J} = -\frac{4M-1}{2\sqrt{2}} - \\ - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i + 2i\sum_{m=1}^{2M-1} \exp(\frac{-2i(-1)^{n_m}\pi m}{4M-1})\right), \tag{32}$$

$$\frac{E_{4M+1}^{\{n\}}}{4J} = -\frac{4M+1}{2\sqrt{2}} - \\ - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i + 2i\sum_{m=1}^{2M} \exp(\frac{-2i(-1)^{n_m}\pi m}{4M+1})\right).$$

Хотя мнимая единица явным образом входит в последние две формулы, энергия E вещественна в любом случае – мнимые части взаимно сокращаются после вычисления суммы. Для четных длин спиновых цепочек $N = 4M$ и $N = 4M + 2$ мы нашли по 2^M уровней энергии. Для нечетных длин спиновых цепочек $N = 4M - 1$ и $N = 4M + 1$ мы нашли, соответственно, по 2^{2M-1} и 2^{2M} собственных значений.

Авторы благодарят М. Ю. Лашкевича за полезные замечания и плодотворные обсуждения.

---

1. М. Годен, *Волновая функция Бете*, Новокузнецкий физико-математический институт, 2000, пер. с французского П. П. Кулиша и Е. К. Склянина, под ред. Л. Д. Фаддеева.
2. V. Pasquier and H. Saleur, Nucl. Phys. **B330**, 523 (1990).
3. Yu-kui Zhou, hep-th/9502053 (1995).
4. A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, J. Phys. **A20**, 1565 (1987).
5. C. M. Yung and M. T. Batchelor, Nucl. Phys. **B446**, 461 (1995).
6. A. Belavin and Yu. Stroganov, hep-th/9908050; Phys. Lett. **B446**, 281 (1999).
7. V. Bazhanov, S. Lukyanov, and A. Zamolodchikov, Commun. Math. Phys. **177**, 381 (1996); **190**, 247 (1997); **200**, 297 (1999).
8. A. A. Belavin, S. Yu.Gubanov, and B. L. Feigin, hep-th/0008011.