Письма в ЖЭТФ, том 83, вып. 4, с. 213 – 218

Квантовый канал для состояний света на основе интегралов движения

В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко

Лаборатория квантовой информации и вычислений, Санкт-Петербургский университет аэрокосмического приборостроения 190000 Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 29 декабря 2005 г.

На основе интегралов движения для коллективных процессов найден метод построения физических схем, в которых состояние одной из подсистем нечувствительно к взаимодействию. В качестве примера рассмотрены варианты квантовых каналов, свободных от декогеренции, которые позволяют перенести произвольное, в том числе фоковское, состояние света через поглощающую среду.

PACS: 42.50.–p

1. Введение. Наличие интегралов движения приводит к возможности сохранения некоторых свойств взаимодействующей системы, которые могут представлять интерес для приложений. Так, для задач квантовой теории информации вопрос о целостности состояний квантовой системы стоит наиболее остро из-за процессов декогеренции, обусловленных необратимыми взаимодействиями с окружением. Проблема декогеренции решается разными способами, одним из которых является использование состояний, свободных от декогеренции (decoherence-free states). Такие состояния сохраняют свою целостность, будучи нечувствительными к взаимодействию. Один из первых примеров состояний, свободных от декогеренции (СоД), был рассмотрен в [1] для задачи взаимодействия N двухуровневых атомов с многомодовым электромагнитным полем. В этой работе найдено подпространство атомных волновых функций, которые аннигилируются гамильтонианом взаимодействия, являясь случаем темных состояний. Для $N = 2$ есть только одна волновая функция, антисимметричная по перестановке частиц Ψ^-, которая является одним из бэлловских состояний. Как показано в [2], состояние Ψ^- не распадается в процессе коллективной релаксации при взаимодействии с термостатом, который может выступать как квантовая память. В ряде работ [3, 4], в частности, посредством методов теории групп анализируются СоД состояния для спин-спинового и спин-бозонного взаимодействий. Оптическая схема СоД квантовых коммуникаций уже продемонстрирована экспериментально на примере четырехфотонных СоД состояний света [5]. Такие подпространства СоД функций представляют интерес для создания помехоустойчивого квантового кода.

Вместе с тем, чтобы найти СоД состояния, можно использовать наличие интегралов движения. Интегралы движения могут приводить к сохранению и возникновению межмодовых квантовых корреляций электромагнитного поля в прозрачных нелинейных средах и резонансных взаимодействиях [6, 7]. На этой основе в [8] продемонстрирована возможность усиления ЭПР (Эйнштейн–Подольский–Розен) пары непрерывных переменных. Основная цель нашей работы – изучить возможность СоД коммуникаций на основе интегралов движения. Мы показываем, что наличие интеграла движения позволяет установить вид взаимодействия двух систем, при котором состояние одной из них не изменяется. Заметим, что, в отличие от СоД подпространства, речь идет о произвольном состоянии некоторой системы, это отличает наши методы от используемых в литературе. В качестве примера мы рассмотрели набор схем с участием двух мод электромагнитного поля и среды из поглощающих атомов. Если одна из мод отсутствует, то оставшаяся будет поглощаться при распространении через среду, однако, несмотря на поглощение, она может воспроизводиться, если есть вторая мода и дополнительные оптические элементы на входе и выходе. Такая схема представляет вариант квантового СоД канала. Мы рассмотрели конкретную задачу о переносе фоковского состояния света через поглощающую среду. Для этого случая СоД канал может быть реализован, если использовать пару непоглощающих делительных пластинок, расположенных на входе и выходе поглощающего слоя, и вспомогательную волну в когерентном состоянии. Фоковские, в частности однофотонные, состояния света представляют интерес для приложений. Использование однофотонных состояний в квантовых вычислениях позволяет реализовать многие операции с помощью линейных оптических элементов. В модели KLM (Knill, Laflemme, Milburn) [9], основанной на линейной оптике, логические переменные $0_L, 1_L$ кодируются фоковскими состояниями $|01\rangle, |10\rangle$. Такие состояния являются неклассическими, они обладают квантовой корреляцией, которая, однако, может быстро разрушаться из-за процессов декогеренции.

Работа построена следующим образом. Вначале приведены общие условия, при которых возникает интеграл движения, и представлены методы построения схем, в которых сохраняется состояние одной из взаимодействующих систем. Затем рассмотрены оптические схемы, позволяющие перенести состояние через слой взаимодействующих со светом двухуровневых атомов. В качестве примера приведена задача о переносе фоковского состояния через поглотитель. Для ее решения требуется смешать на непоглощающей делительной пластинке моды в фоковском и когерентном состояниях. При этом возникает состояние света, которое уже реализовано в эксперименте [10], а его свойства кратко обсуждаются в Приложении.

2. Интеграл движения. Пусть H_{AB} – гамильтониан двух взаимодействующих систем A и B, а $Z = Z(A,B)$ – наблюдаемая, которая может зависеть от переменных обеих систем. Эволюция оператора Z определяется выражением

$$Z' = T^{\dagger}_{AB} Z T_{AB}, \tag{1}$$

где $T_{AB} = \exp(-i\hbar^{-1}H_{AB}t)$, и мы предположили для простоты, что гамильтониан H_{AB} не зависит от времени. Если

$$[T_{AB}; Z] = 0, \tag{2}$$

то Z является интегралом движения. Условие (2) может быть выполнено в разных случаях. Пусть оператор эволюции не зависит от переменных одной из систем, например, B:

$$T_{AB} = T_A \otimes 1_B. \tag{3}$$

Очевидно, что при этих условиях любая наблюдаемая $Z(B)$ является интегралом движения.

Одно нетривиальное решение для (3) можно получить с помощью унитарных преобразований. Пусть $U(A,B)$ – унитарный оператор, зависящий от переменных систем A и B, тогда для любого оператора $S(A)$

$$U^{\dagger}(A,B)(S(A) \otimes 1_B)U(A,B) = S(A,B). \tag{4}$$

Отсюда непосредственно следует (3)

$$T_{AB} = U(A,B)S(A,B)U^{\dagger}(A,B) = S(A) \otimes 1_B. \tag{5}$$

С учетом (3) эволюция матрицы плотности двух систем имеет вид

$$\rho'_{AB} = T_{AB}(\rho_A \otimes \rho_B)T^{\dagger}_{AB} = \rho'_A \otimes \rho_B. \tag{6}$$

Уравнение (6) означает, что при наличии интеграла движения состояние, определяемое матрицей плотности ρ_B, не изменяется при взаимодействии с системой A. Заметим, что этот вывод справедлив для любого состояния системы B. В отличие от нашего случая, в [1] использован другой метод и найден конечный набор состояний $\{\Psi_B\}$, которые аннигилируются гамильтонианом H_{AB}: $H_{AB}\Psi_B = 0$. Они нечувствительны к взаимодействию и для них также справедливо (6).

Пусть унитарные операторы R_A и N_B зависят от переменных A и B. Тогда (3) допускает простое преобразование:

$$(R_A \otimes N_B)^{\dagger} T_{AB} (R_A \otimes N_B) = T'_A \otimes 1_B, \tag{7}$$

которое оставляет в силе приведенные свойства. Полученное уравнение (7) позволяет рассматривать разные физические схемы взаимодействия.

Уравнение (5) допускает простую интерпретацию, если считать, что оператор $S(A,B)$ является унитарным и, следовательно, может описывать эволюцию некоторого процесса с гамильтонианом взаимодействия V_{AB}: $S(A,B) = \exp(-iV_{AB}t)$. Тогда возникает следующее свойство. Наличие интеграла движения позволяет указать вид взаимодействия и построить для него схему, составленную из трех последовательных преобразований $U(A,B)S(A,B)U^{\dagger}(A,B)$, оставляющих неизменной подсистему B. Используя эту схему в качестве исходного ресурса, с помощью унитарного преобразования (7) можно построить набор унитарно эквивалентных схем $U'(A,B)S'(A,B)U'^{\dagger}(A,B)$, где $X' = (R_A \otimes N_B)^{\dagger} X (R_A \otimes N_B)$, $X = U(A,B), S(A,B)$, которые выполняют ту же задачу.

В качестве примера рассмотрим преобразование Боголюбова для двух бозонных операторов a и b: $U^{\dagger}aU = ca + sb$, $U^{\dagger}bU = -sa + cb$, где $c^2 + s^2 = 1$. Тогда $S(ca + sb) = U^{\dagger}S(a)U$, где S – унитарный оператор, который может описывать физическое взаимодействие двух мод, представленных коллективным оператором $ca + sb$. Непосредственно видно, что $T_{ab} = US(ca + sb)U^{\dagger} = S(a) \otimes 1_b$. Используем далее свойство (7). Пусть R_a – оператор фазового сдвига: $R_a : a \to a\exp(i\mu)$, где μ – вещественное число, $N_b = 1$, тогда $T_{ab} \to T'_{ab} = U'S'(ca\exp(i\mu) + sb)U'^{\dagger} =$

$= S(a) \otimes 1_b$, где $U' = R_a^\dagger U R_a$. Приведенные весьма общие свойства могут быть реализованы для конкретных физических процессов.

3. Оптическая схема. Рассмотрим оптические схемы для случая взаимодействия мод a и b с поглощающей средой, представленной набором двухуровневых атомов. В обоих схемах частота моды b резонансна атомному переходу, поэтому она будет поглощаться, однако присутствие второй моды приводит к тому, что b будет нечувствительна к поглощению. Мы рассмотрим два типа взаимодействия моды a с переходом: 1 – однофотонное поглощение, 2 – двухфотонное и комбинационное взаимодействия.

1. Пусть гамильтониан системы атомов и поля имеет вид

$$H = H_P + H_F + V, \tag{8}$$

где H_P – гамильтониан свободных атомов, $H_F = \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\omega_b b^\dagger b$ – гамильтониан свободного поля, $a^\dagger, a$ и $b^\dagger, b$ – операторы рождения и уничтожения мод с частотами ω_a, ω_b. В дипольном и квазирезонансном приближениях оператор взаимодействия имеет вид

$$V = i\hbar[S_{10}(ga + fb) - S_{01}(ga + fb)^\dagger], \tag{9}$$

где $S_{xy} = \sum_m s_{xy}(m)$, $s_{xy}(m) = |x\rangle_m\langle y|$ – одноатомный оператор, $x, y = 0, 1$, $|0\rangle_m$ – нижний и $|1\rangle_m$ – верхний уровни атома m; g, f – константы взаимодействия, которые будем считать вещественными.

Введем новые переменные

$$r = (ga + fb)G^{-1}, \tau = (fa - gb)G^{-1}, \tag{10}$$

где $G = \sqrt{g^2 + f^2}$. Тогда гамильтониан взаимодействия (9) будет зависеть только от r: $V = i\hbar G[S_{10}r - S_{01}r^\dagger]$, а уравнение движения для τ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\tau = i\hbar^{-1}[H, \tau] = -i(f\omega_a a - g\omega_b b)G^{-1}. \tag{11}$$

Отсюда следует, что при равенстве частот $\omega_a = \omega_b = \omega$ линейная комбинация операторов $\tau = (fa - gb)G^{-1}$ является интегралом движения, поскольку для нее вся эволюция сводится лишь к умножению на фазовый множитель $\exp(-i\omega t)$.

Отметим следующие особенности. Во-первых, если учитывать атомную релаксацию, которую можно описать, добавив в (8) взаимодействие с термостатом, то найденный интеграл остается. Во-вторых, любая функция $\varphi(\tau, \tau^\dagger)$ также является интегралом движения.

Приведенная модель может описывать случай распространения волн с одинаковыми частотами, близкими к частоте рабочего перехода. При этом волны должны различаться поляризацией или направлением распространения и взаимодействовать одновременно с одним и тем же атомным переходом. Это будет выполнено, например, для широкополосного поглотителя, который нечувствителен к поляризации света. Далее, для определенности, будем рассматривать поглощение. Унитарное преобразование U, определенное согласно (10), выделяет линейную комбинацию мод, которая не испытывает взаимодействия с атомами. Преобразование U можно осуществить либо с помощью непоглощающей делительной пластинки, либо с помощью параметрического генератора с классической волной накачки. Обе физические системы описываются эффективным гамильтонианом взаимодействия

$$v = i\hbar k(a^\dagger b - ab^\dagger), \tag{12}$$

где моды a и b имеют одинаковые частоты и поляризацию, если рассматривать случай делительной пластинки, и могут иметь разные частоты и поляризацию для случая параметрического генератора.

Далее, для определенности, будем рассматривать делительную пластинку, тогда $U = \exp(-i\hbar^{-1}vt)$. Теперь учтем атомную релаксацию, добавляя к гамильтониану H оператор взаимодействия атомов с термостатом V_E и гамильтониан свободной энергии термостата H_E: $H \to H + H_E + V_E$. Для простоты ограничимся резонансным взаимодействием мод a и b, полагая

$$\omega_a = \omega_b = \omega_0, \tag{13}$$

где ω_0 – частота атомного перехода. В этих условиях в представлении взаимодействия найдем

$$\begin{aligned} S(ga + fb) &= \\ = T\exp\{-i\hbar^{-1}\int_0^t dt'[V(ga + fb) + V_E(t')]\} &= \\ = U^\dagger T\exp\{-i\hbar^{-1}\int_0^t dt'[V(a) + V_E(t')]\}U &= \\ = U^\dagger S(a)U, \end{aligned} \tag{14}$$

где T – оператор временного упорядочения, использовано соотношение $U^\dagger a U = (ga + fb)G^{-1}$ с учетом $[U; V_E] = 0$. Отсюда непосредственно следует (5).

Уравнение (14) позволяет построить оптическую схему с двумя модами и атомной средой, где одна из мод будет нечувствительна к поглощению. Для этого нужны две делительные пластинки, расположенные перед поглотителем и после него. Схема работает следующим образом. Возьмем делительные пластинки с одинаковыми коэффициентами пропускания и отражения c и s, где

$$c = -gG^{-1}, s = fG^{-1}. \tag{15}$$

Пусть a', b' – моды на входе поглощающей среды, a'', b'' – моды на ее выходе. Пусть линейная комбинация мод $\tau = (fa' - gb')/G$ является интегралом движения, тогда $\tau = (fa'' - gb'')/G$. Если моды a'' и b'' с выхода среды смешать на делительной пластинке, то на одном из ее выходов, который является выходом всей схемы, будет возникать интеграл движения $(ca'' - sb'') = b_{\text{out}}$. Преобразование входных мод a', b' удобно рассматривать в обратном порядке. Так, пусть они смешиваются на другой делительной пластинке. Тогда на одном из ее выходов будет возникать интеграл движения $(ca' - sb') = b_{\text{in}}$. Однако этот выход служит одним из входов всей схемы, поэтому $b_{\text{in}} = \tau = b_{\text{out}}$. Это означает, что мода b воспроизводится на выходе, оказываясь нечувствительной к поглощению.

2. Рассмотрим схемы, которые получаются из предыдущей с помощью унитарного преобразования (7), где возникают взаимодействия с участием классических волн. Пусть в (7) оператор $N_B = 1$, а R_A возьмем в виде оператора фазового сдвига, действующего на моду $R_a : a \to a\exp(i\epsilon\Omega t)$, где $\epsilon = \pm 1$, $\Omega > 0$. Если положить $\epsilon = 0$, то возникает предыдущий случай. Все ресурсы новой схемы получаются унитарным преобразованием R_a исходных элементов, что, однако, приводит к другим физическим процессам. Так, гамильтониан взаимодействия (9) принимает вид

$$V' = i\hbar[S_{10}(gae^{\epsilon i\Omega t} + fb) - S_{01}(ga^\dagger e^{-\epsilon i\Omega t} + fb^\dagger)]. \tag{16}$$

При $\epsilon = \pm 1$ этот гамильтониан позволяет описать процессы невырожденного двухфотонного поглощения и комбинационного взаимодействия моды a в присутствии сильной классической волны на частоте Ω:

$$\begin{aligned} \omega_a + \Omega = \omega_b = \omega_0, \\ \omega_a - \Omega = \omega_b = \omega_0. \end{aligned} \tag{17}$$

Отсюда следует новый интеграл движения $\tau' = (fa\exp(i\epsilon\Omega)t - gb)/G$ при условии, что $\omega_a - \epsilon\Omega = \omega_b$, а унитарное преобразование U', которое в предыдущей схеме было реализовано делительной пластинкой, вместо (12) теперь определяется гамильтонианом

$$v' = i\hbar k(a^\dagger b\exp(-i\epsilon\Omega t) - ab^\dagger\exp(i\epsilon\Omega t)). \tag{18}$$

Этот эффективный гамильтониан описывает трехфотонный параметрический процесс сложения частот $\omega_a - \epsilon\Omega = \omega_b$ с классической волной накачки на частоте Ω. В итоге в рассматриваемой схеме, чтобы перенести моду b через поглощающую среду, нужно смешать ее с модой a в параметрическом генераторе, затем обе моды направить на поглотитель и выделить b, используя второй параметрический генератор.

4. Квантовый канал для фоковских состояний света. В качестве примера использования представленных схем рассмотрим задачу о переносе фоковского состояния света через поглотитель. Согласно (5) и (9), такая схема будет состоять из двух делительных пластинок и поглощающей среды, которая описывается оператором $S(ga + fb)$. Воспользуемся выражением (6), где оператор эволюции имеет вид $T_{AB} = US(ga + fb)U^\dagger$. Возьмем моду a в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$, а b – в фоковском состоянии $|n\rangle$. Пусть на первой делительной пластинке смешиваются моды a и b и направляются на вход поглотителя, на выходе которого расположена вторая делительная пластинка. Тогда в соответствии с (6) на одном из выходов схемы может воспроизводиться фоковское состояние, а на другом – когерентное, которое, однако, будет ослаблено.

Для описания свойств света будем использовать нормально-упорядоченную характеристическую функцию C_N, которая, в отличие от квазивероятности Глаубера–Сударшана, является несингулярной функцией для фоковского состояния. Функция C_N определяется как среднее значение операторов сдвига и является фурье-образом квазивероятности Глаубера–Сударшана P:

$$\begin{aligned} C_N(\beta_1, \beta_2) = \mathrm{Sp}\{\rho D_N(\beta_1) D_N(\beta_2)\} = \\ = \int d^2\alpha_1 d^2\alpha_2 P(\alpha_1, \alpha_2) e^{\beta_1\alpha_1^* + \beta_2\alpha_2^* - \text{c.c.}}, \end{aligned} \tag{19}$$

где $D_N(\beta_k) = \exp(\beta_k c_k^\dagger)\exp(-\beta_k^* c_k)$, $k = 1, 2$, $c_1 = a$, $c_2 = b$, ρ – матрица плотности мод a и b. Если на входе первого делителя мода a в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$, а мода b – в фоковском состоянии $|n\rangle$, тогда для характеристической функции света на выходе следует выражение

$$\begin{aligned} C_N(\beta_1, \beta_2) = \\ = \exp\{(c\beta_1 - s\beta_2)\alpha^* - (c\beta_1 - s\beta_2)^*\alpha\} \times \\ \times \sum_{k=0}^{n} C_k^n \frac{(-1)^k}{k!} |s\beta_1 + c\beta_2|^{2k}, \end{aligned} \tag{20}$$

где c, s – коэффициенты пропускания и отражения.

Процесс распространения света через слой атомов в условиях линейного поглощения, который описывается гамильтонианом (9), будем описывать с помощью управляющего уравнения для поля. Чтобы построить это уравнение, будем считать, что атомы развиваются быстро, а поле медленно, и воспользуемся процедурой адиабатического исключения быстрых переменных, представленной в [11], и формализмом квантовой теории переноса [12]. Для простого случая одномерного распространения света в приближении Фоккера–Планка управляющее уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial z}\right)C(z,t)= \\ =-R\left[\left(c-s\frac{f}{g}\right)h+\left(s+c\frac{f}{g}\right)e\right]\times \\ \times\left[\left(\left(c-s\frac{f}{g}\right)\frac{\partial}{\partial h}+\left(s+c\frac{f}{g}\right)\frac{\partial}{\partial e}\right)+\text{c.c.}\right]C(z,t), \quad (21)$$

где $R=g^2N/\gamma$ – коэффициент поглощения, v – фазовые скорости распространения мод в случае однонаправленного распространения, которые для простоты положены одинаковыми, N – заселенность нижнего атомного уровня, γ – константа поперечной релаксации, и введены переменные

$$h=c\beta_1-s\beta_2 \qquad e=s\beta_1+c\beta_2. \quad (22)$$

Уравнение (21) нужно решать при заданных граничных условиях, в качестве которых возьмем характеристическую функцию (20), описывающую свет на выходе первой делительной пластинки.

Пусть $sg=-cf$, что соответствует условиям (15), тогда в (21) слагаемые с производными по e равны нулю и в стационарном режиме решение имеет вид

$$C_N(z)=\exp[q(h\alpha^*-h^*\alpha)]\sum_{k=0}^{n}C_k^n\frac{(-1)^k}{k!}|e|^{2k}, \quad (23)$$

где $q=\exp(-Mz)$, $M=(R/v)c^2(1+(f/g))^2$. Чтобы получить состояние поля на выходе поглотителя, в (23) с помощью (22) нужно перейти к переменным β_1,β_2. Унитарное преобразование света второй делительной пластинкой, помещенной после поглощающей среды, описывается заменой переменных типа (22) и имеет вид $\beta_1'=c\beta_1-s\beta_2$, $\beta_2'==s\beta_1+c\beta_2$, где мы положили пластинки одинаковыми. В результате характеристическая функция на выходе всей схемы имеет вид $C_N(\beta_1',\beta_2')==\exp[q(\beta_1'\alpha^*-\beta_1'^*\alpha)]\sum_{k=0}^{n}C_k^n(-1)^k|\beta_2'|^{2k}/k!$. Она описывает две независимые моды в когерентном, $|q\alpha\rangle$, и фоковском, $|n\rangle$, состояниях. В итоге возникает преобразование

$$|\alpha\rangle\otimes|n\rangle\to|\alpha e^{-Mz}\rangle\otimes|n\rangle. \quad (24)$$

На выходе схемы воспроизводится фоковское состояние, а амплитуда когерентного состояния затухает.

Приведем оценки возможной реализации рассмотренного явления. В эксперименте [10] источником однофотонного состояния является известный кристалл BBO длиной порядка 2 мм. В процессе спонтанного праметрического рассеяния мощной когерентной волны накачки образуется бифотонное состояние, существенным отличием которого является сильная парная корреляция фотонов пары. Разделяя фотонную пару и посылая один из фотонов на детектор, а другой в оптическую схему, можно производить так называемое контролируемое приготовление состояния. Действительно, регистрация фотона однофотонным детектором редуцирует состояние всего светового поля и обнаруживает или инициирует однофотонное состояние в оптической схеме. По оценкам авторов, генерируется 300–400 однофотонных состояний в секунду. Накачка кристалла осуществляется титан-сапфировым импульсным лазером на длине волны 790 нм с частотой следования 816 кГц, длительностью импульсов 1.6 пс. Это лазерное излучение в когерентном состоянии разделяется светоделителем, после которого одна часть излучения, проходя через удвоитель (трибoрат лития), осуществляет накачку кристалла, а другая, по-прежнему являясь когерентным состоянием, смешивается с однофотонным состоянием на делительной пластинке входа оптической схемы поглотителя. В качестве поглотителя может быть использован, например Nd^{3+} в стеклянной или кристаллической матрице, имеющий поглощение в области 800 нм. Соотношение (15) согласует отношение констант взаимодействия излучения с переходом и коэффициентом пропускания и отражения светоделительных пластинок оптической схемы.

Итак, использование интегралов движения позволяет построить набор схем с коллективным взаимодействием, где состояние одной из подсистем не изменяется.

Авторы признательны А.М. Башарову и С.П. Кулику за полезные обсуждения.

Приложение

Рассмотрим свойства света, полученного путем смешения на делительной пластинке когерентного состояния, которое обычно ассоциируется с волновой природой света, и фоковского состояния, которое ассоциируется с корпускулярной природой. Характеристическая функция на выходе светоделительной пластинки, определенная согласно (20), описывает чистое состояние

$$A_{n\alpha}=(1/\sqrt{n!})(sa+cb)^nA_{0\alpha}, \\ A_{0\alpha}=|c\alpha\rangle\otimes|-s\alpha\rangle, \quad (25)$$

где α и n – комплексная амплитуда и число фотонов когерентной и фоковской моды на входе. Из-за фоковского состояния возникают неклассические корреляции интенсивности, которые приводят к субпуассоновской статистике фотонов. При этом справедливы следующие свойства: 1) каждая мода имеет субпуассоновскую статистику фотонов (например, для моды a параметр Манделя имеет вид $\xi_a = s^2n^22c^2(|\alpha|^2 - s^2)/(c^2|\alpha|^2 + s^2n) \geq -1$), 2) совместная скорость счета совпадений фотонов меньше, чем в случайном потоке : $\langle a^\dagger ab^\dagger b\rangle - \langle a^\dagger a\rangle\langle b^\dagger b\rangle = -c^2s^2n(2|\alpha|^2 + 1)$, 3) дисперсия оператора числа фотонов $u = a^\dagger a + \epsilon b^\dagger b$, где $\epsilon = \pm 1$, может быть меньше дробового уровня $\langle a^\dagger a + b^\dagger b\rangle$, что означает подавление дробового шума при регистрации суммарного или разностного тока двух детекторов.

Другой класс корреляций, которые приводят к сжатым и перепутанным состояниям, описывается с помощью квадратурных операторов мод, которые выражаются через операторы канонической координаты и импульса. Эти корреляции измеряются в схемах гетеродинного приема и являются фазовочувствительными. Из-за наличия фоковского состояния, которое не имеет фазы, речь идет о рассмотрении в фазовом пространстве, состояние $A_{n\alpha}$ не обладает сжатием.

Является ли $A_{n\alpha}$ перепутанным? Из (25) видно, что волновая функция не факторизуется. Согласно этому свойству, состояние мод на выходе следует считать перепутанным. При $n = 1$ волновая функция $A_{1\alpha}$ имеет вид $A_{1\alpha} = (1/\sqrt{2})(|t_0t_1\rangle - |t_1, t_0\rangle)$, где $t_m = a^{\dagger m}|\alpha/\sqrt{2}\rangle$, что выглядит как ЭПР пара для дискретных переменных. Однако наличие когерентного состояния позволяет рассмотреть свойство перепутанности, точнее, несеперабельности, с точки зрения непрерывных переменных. Для этого воспользуемся критерием сепарабельности [13]. Согласно этому критерию, для всякого сепарабельного состояния

$$C = \langle(\Delta Q)^2\rangle + \langle(\Delta P)^2\rangle \geq 2 \tag{26}$$

для суммы дисперсий оператора суммарной канонической координаты $Q = x_a + x_b$ и разности импульсов $P = p_a - p_b$, где $a = x_a + ip_a$, $b = x_b + ip_b$. Если неравенство нарушается, то вопрос, будет ли состояние обязательно несепарабельным, остается открытым. Только для гауссовых полей, с гауссовой функцией Вигнера, критерий носит необходимый и достаточный характер. В нашем случае вигнеровская функция негауссова, что вовсе неважно, поскольку неравенство не нарушается:

$$C = 2(1 + n) \geq 2. \tag{27}$$

Поэтому состояние $A_{n\alpha}$ будет сепарабельным или неперепутанным. Вопрос о соотношениях между факторизуемостью волновой функции, перепутанностью и сепарабельностью мы оставим открытым. Однако данный пример показывает, что состояние $A_{n\alpha}$ может иметь противоположные свойства в отношении дискретных и непрерывных переменных. Действительно, его можно использовать как квантовый канал для стандартного протокола телепортации дискретных переменных. Для этого достаточно заметить, что оно унитарно эквивалентно фоковским состояниям, на основе которых можно построить вариант бэлловского измерения и восстанавливающие операторы. Тогда новый протокол получается простым локальным унитарным преобразованием. Однако сепарабельность $A_{n\alpha}$ означает, что по крайней мере оно не обладает свойством ЭПР пары непрерывных переменных [14], для которой $C = 0$.

1. P. Zanardi and M. Rasetti, Phys. Rev. Lett. **79**, 3306 (1997).
2. А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **75**, 151 (2002); ЖЭТФ **121**, 1249 (2002).
3. L.-M. Duan and G.-C. Guo, Phys. Rev. Lett. **79**, 1953 (1997).
4. D. A. Lidar, I. L. Chuang, and K. B. Whaley, Phys. Rev. Lett. **81**, 2594 (1998); D. A. Lidar, D. Bacon, J. Kempe, and K. B. Whaley, Phys. Rev. A **61**, 052307 (2000); J. Kempe, D. Bacon, D. A. Lidar, and K. B. Whaley, Phys. Rev. A **63**, 042307 (2001).
5. M. Bourennane, M. Eibl, S. Gaertner et al., Phys. Rev. Lett. **92**, 107901 (2004).
6. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, Оптика и спектр. **89**, 420 (2000).
7. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, Оптика и спектр. **84**, 970 (1998).
8. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, Письма в ЖЭТФ **77**, 563 (2003).
9. E. Knill, R. Laflemme, and G. J. Milburn, Nature **46**, 409 (2001).
10. A. I. Lvovsky and S. A. Babichev, Phys. Rev. A **66**, 011801(R) (2002).
11. V. N. Gorbachev and A. I. Zhiliba, Quantum Opt. **5**, 193 (1993).
12. V. N. Gorbachev and A. I. Zhiliba, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 3771 (2000).
13. L.-M. Duan, G. Gedke, J. I. Cirac, and P. Zoller, Phys. Rev. A **64**, 2722 (2000); R. Simon, Phys. Rev. A **64**, 2726 (2000).
14. S. L. Braunstein and H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **80**, 869 (1998).