

# Излучение фононов вихревыми нитями и распад турбулентного состояния в бозе-конденсате

П. А. Кузьмин<sup>1)</sup>

Физический факультет МГУ, кафедра квантовой статистики и теории поля, 119899 Москва, Россия

Поступила в редакцию 3 июля 2006 г.

После переработки 17 июля 2006 г.

Изучается механизм распада турбулентности в бозе-конденсате (сверхтекучей жидкости), связанный с излучением звуковых волн при пересоединении вихревых нитей. Развивается подход, основанный на уравнении марковской эволюции для распределения вихревых колец по длинам. Получены уравнения эволюции плотности вихревых нитей для квазистационарного и неквазистационарного режимов. Закон распада сопоставлен с результатами численного моделирования.

PACS: 47.37.+q, 67.40.Vs, 98.80.Cq

Выяснение механизма распада турбулентного состояния сверхтекучей жидкости является важной задачей гидродинамики [1]. При температурах  $T > 1$  К основными факторами диссипации оказываются вязкость нормальной компоненты и взаимное трение. В случае более низких температур названные источники рассеяния энергии турбулентного состояния отсутствуют, так как плотность нормальной компоненты мала. Эксперимент, однако, обнаруживает не зависящую от температуры диссипацию квантовой турбулентности [2]. В работах [3–5] указана возможность распада турбулентности за счет излучения звуковых волн в акте пересоединения вихрей (vortex reconnection) [6] и при распространении волн Кельвина.

В данной работе изучается закон эволюции предоставленного самому себе хаотического однородного и изотропного вихревого клубка в бесконечном пространстве. Температура предполагается настолько малой, что плотностью нормальной компоненты и взаимным трением можно пренебречь. Основным результатом является закон (13) быстрого, существенно нестационарного распада плотного вихревого клубка. Применяется подход к анализу эволюции вихревого клубка, основанный на уравнении марковской эволюции для распределения вихревых колец по длинам. Такая методика была развита в работах [7, 8] для космических струн и использована в недавней работе [9] для получения стационарного распределения вихревых колец по длинам в сверхтекучем гелии. В рамках данного подхода в работе [9] также установлена связь среднего радиуса кривизны нити со средним расстоянием между нитями в стационарном вихре-

вом клубке, получено уравнение Вайнена для распада турбулентности в квазистационарном режиме за счет волн Кельвина, вычислена частота пересоединений для стационарного состояния.

Кратко напомним основные результаты работы [9]. Турбулентность в бозе-конденсате рассматривается как хаотический клубок вихревых нитей, взаимодействующих при пересечении. В численных экспериментах, основанных на уравнении Гросса–Питаевского, установлено, что при сближении вихревых нитей с достоверностью происходит их пересоединение, сопровождающееся излучением волн (импульсов разрежения) и возмущением самих нитей. В рассматриваемой в работе [9] модели состояние в момент времени  $t$  задается плотностью распределения  $n(l, t)$  вихревых петель по длинам. Пересоединения нитей могут влиять на плотность распределения двояким образом: пересоединение может приводить к слиянию двух петель длинами  $l_1$  и  $l_2$  в одну петлю длиной  $l \leq l_1 + l_2$  или к распаду одной петли длиной  $l$  на две длинами  $l_1$  и  $l_2$ ,  $l_1 + l_2 \leq l$ . Эти процессы могут сопровождаться излучением фононов. Заметим, что возможен процесс рассеяния кольца на кольце, как это показано в численном эксперименте [10] для солитонных решений – вихревых колец, распространяющихся в одном направлении. Однако при этом происходят два пересоединения одновременно, и этот процесс является маловероятным. По этой причине, следуя [9], в данной работе он также не учитывается. В работах [7, 11] вычислены вероятность слияния  $A(l_1, l_2, l)$  двух вихревых петель в одну  $l_1 + l_2 \rightarrow l = l_1 + l_2$  и вероятность распада  $B(l_1, l_2, l)$  вихревой петли  $l \rightarrow l_1 + l_2$ . Обе вероятности вычислены в предположении о броуновском случайном блуждании петель и выражаются формулами

<sup>1)</sup>e-mail: kuzminp@list.ru

$$\begin{aligned} A(l_1, l_2, l) &= b_m V_l l_1 l_2, \\ B(l_1, l_2, l) &= b_s V_l l (\xi_0 l_1)^{-3/2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $b_m, b_s$  – некоторые константы,  $V_l$  – характерная скорость вихревых нитей, связанная с радиусом кривизны нити  $\xi$  соотношением  $V_l = \kappa/\xi$ , где  $\kappa$  – квант циркуляции, в безразмерных единицах равный  $2\pi$ . Если не указано обратное, далее все формулы и оценки записываются в безразмерных единицах, в которых за единицу длины принимается длина когерентности (радиус кора), а квант циркуляции равен  $2\pi$ . Такие единицы обезразмеривают уравнение Гросса–Питаевского. Величина  $\xi_0$  обозначает средний радиус кривизны вихревых нитей и является основным параметром теории. Рассматриваемая модель применима только на масштабах, превосходящих  $\xi_0$ , и в работах [9, 7, 8] эта величина использована как параметр обрезания снизу. В [9] исследовано стационарное решение кинетического уравнения для состояния  $n(l, t)$ :

$$\partial n(l, t)/\partial t = I_0 [n(l, t)], \quad (2)$$

где интеграл столкновений  $I_0$  имеет вид

$$\begin{aligned} I_0 [n(l, t)] &= \\ &= \int A(l_1, l_2, l) n(l_1, t) n(l_2, t) \delta(l - l_1 - l_2) dl_1 dl_2 - \\ &- \int A(l_1, l, l_2) n(l, t) n(l_1, t) \delta(l_2 - l_1 - l) dl_1 dl_2 - \\ &- \int A(l_2, l, l_1) n(l, t) n(l_2, t) \delta(l_1 - l_2 - l) dl_1 dl_2 - \\ &- \int B(l_1, l_2, l) n(l, t) \delta(l - l_1 - l_2) dl_1 dl_2 + \\ &+ \int B(l, l_2, l_1) n(l_1, t) \delta(l_1 - l_2 - l) dl_1 dl_2 + \\ &+ \int B(l, l_1, l_2) n(l_2, t) \delta(l_2 - l_1 - l) dl_1 dl_2. \end{aligned} \quad (3)$$

В работе [9] получено стационарное решение кинетического уравнения

$$n_0(l) = C_{VLD} \xi_0^{-3/2} l^{-5/2}, \quad (4)$$

где  $C_{VLD}$  – некоторая константа порядка единицы. В данной заметке мы интересуемся поведением плотности (полной длины) вихревых нитей

$$\mathcal{L}(t) = \int l \cdot n(l, t) dl. \quad (5)$$

В [9] установлено, что полная длина вихревых нитей в стационарном состоянии имеет вид

$$\mathcal{L} = \int_{\xi_0}^{\infty} l \cdot n(l) dl = \frac{2}{3} \frac{C_{VLD}}{\xi_0^2}, \quad (6)$$

чем показано, что среднее расстояние между вихревыми нитями  $\mathcal{L}^{-1/2}$  в стационарном состоянии имеет порядок среднего радиуса кривизны  $\xi_0$  – факт, обнаруженный ранее в численных экспериментах. В процессе эволюции состояния  $n(l, t)$  согласно кинетическому уравнению с интегралом столкновений  $I_0$  в каждом из актов слияния или расщепления вихревых петель длина петли сохраняется, следовательно, должно иметь место равенство  $d\mathcal{L}/dt = 0$ . Прямая проверка этого равенства может быть проведена подстановкой  $\partial n(l, t)/\partial t$  в (5), но выражение  $\int l I_0 [n(l, t)] dl$  содержит расходимости и требует регуляризации [12].

На основе кинетического уравнения (2) в [9] получено выражение для верхней границы скорости убывания плотности вихревых нитей при наличии механизмов распада малых вихревых колец в фононы:

$$-d\mathcal{L}/dt \leq C_{Vinen} \kappa \mathcal{L}^2(t), \quad (7)$$

где  $C_{Vinen}$  – константа, не зависящая от  $\xi_0$ . Из совпадения правой части (7) с правой частью уравнения Вайнена не следует, что имеет место квантовый режим турбулентности [13, 18].

Основной целью настоящей работы является выяснение закона убывания плотности вихревых нитей  $\mathcal{L}(t)$  в бозе-конденсате за счет потерь энергии на излучение в акте пересоединения нитей. Величина потери длины вихревой нити вычислена в численном эксперименте [10], основанном на уравнении Гросса–Питаевского, в этой же работе установлена зависимость потери длины от угла пересечения вихревых нитей. Из результатов работы [10] видно, что потеря длины при пересоединении составляет несколько безразмерных единиц длины. В данной работе потеря длины при каждом пересоединении предполагается постоянной и равной  $\Delta l$ .

Пусть при каждом слиянии петель теряется длина  $\Delta l$ , а при распаде вихревой петли обе новые петли теряют длину  $\Delta l/2$ . Исходя из этих предположений, можно записать новый интеграл столкновений, учитывая диссипацию энергии при пересоединении:

$$\begin{aligned} I [n(l, t)] &= \\ &= \int A(l_1, l_2, l) n(l_1, t) n(l_2, t) \delta(l + \Delta l - l_1 - l_2) dl_1 dl_2 - \\ &- \int A(l_1, l, l_2) n(l, t) n(l_1, t) \delta(l_2 + \Delta l - l_1 - l) dl_1 dl_2 - \\ &- \int A(l_2, l, l_1) n(l, t) n(l_2, t) \delta(l_1 + \Delta l - l_2 - l) dl_1 dl_2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int B \left( l_1 + \frac{\Delta l}{2}, l_2 + \frac{\Delta l}{2}, l \right) n(l, t) \times \\
& \quad \times \delta(l - \Delta l - l_1 - l_2) dl_1 dl_2 + \\
& + \int B \left( l + \frac{\Delta l}{2}, l_2 + \frac{\Delta l}{2}, l_1 \right) n(l_1, t) \times \\
& \quad \times \delta(l_1 - \Delta l - l_2 - l) dl_1 dl_2 + \\
& + \int B \left( l + \frac{\Delta l}{2}, l_1 + \frac{\Delta l}{2}, l_2 \right) n(l_2, t) \times \\
& \quad \times \delta(l_2 - \Delta l - l_1 - l) dl_1 dl_2,
\end{aligned} \quad (8)$$

который совпадает с (3) при  $\Delta l = 0$ . Произведя замену  $l_2 \mapsto l_2 - \Delta l$  во втором интеграле, замену  $l_1 \mapsto l_1 - \Delta l$  в третьем, и  $l_1 \mapsto l_1 - \Delta l/2$ ,  $l_2 \mapsto l_2 - \Delta l/2$  - в четвертом, а также заметив, что пятый и шестой интегралы совпадают, запишем разность  $I[n(l, t)] - I_0[n(l, t)]$ :

$$\begin{aligned}
& I[n(l, t)] - I_0[n(l, t)] = \\
& = \int A(l_1, l_2, l) n(l_1, t) n(l_2, t) \delta(l + \Delta l - l_1 - l_2) dl_1 dl_2 - \\
& - \int A(l_1, l_2, l) n(l_1, t) n(l_2, t) \delta(l - l_1 - l_2) dl_1 dl_2 + \\
& + 2 \int B \left( l + \frac{\Delta l}{2}, l_2 + \frac{\Delta l}{2}, l_1 \right) n(l_1, t) \times \\
& \quad \times \delta(l_1 - \Delta l - l_2 - l) dl_1 dl_2 - \\
& - 2 \int B(l, l_2, l_1) n(l_1, t) \delta(l_1 - l_2 - l) dl_1 dl_2.
\end{aligned} \quad (9)$$

Вычислим  $\int l (I[n(l, t)] - I_0[n(l, t)]) dl$ :

$$\begin{aligned}
& \int l (I[n(l, t)] - I_0[n(l, t)]) dl = \\
& = \int (l_1 + l_2 - \Delta l) A(l_1, l_2, l) n(l_1, t) n(l_2, t) dl_1 dl_2 - \\
& - \int (l_1 + l_2) A(l_1, l_2, l) n(l_1, t) n(l_2, t) dl_1 dl_2 + \\
& + 2 \int l B \left( l + \frac{\Delta l}{2}, l_1 - l - \frac{\Delta l}{2}, l_1 \right) n(l_1, t) dl_1 dl - \\
& - 2 \int l B(l, l_1 - l, l_1) n(l_1, t) dl_1 dl.
\end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая равенства (1), имеем:

$$\begin{aligned}
& \int l (I[n(l, t)] - I_0[n(l, t)]) dl = \\
& = -\Delta l b_m V_i \mathcal{L}^2(t) + 2b_s V_i \mathcal{L}(t) \xi_0^{-3/2} \times \\
& \times \left[ \int_{\xi_0}^{\infty} l \left( l + \frac{\Delta l}{2} \right)^{-\frac{3}{2}} dl - \int_{\xi_0}^{\infty} l (l)^{-\frac{3}{2}} dl \right].
\end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что оба интеграла в последнем выражении расходятся на верхнем пределе. В качестве нижнего предела используем параметр обрезания  $\xi_0$  - средний

радиус кривизны вихревых нитей. Окончательно для разности (10) имеем:

$$\begin{aligned}
& \int l (I[n(l, t)] - I_0[n(l, t)]) dl = \\
& = -\Delta l b_m V_i \mathcal{L}^2(t) - 2b_s V_i \mathcal{L}(t) \frac{1}{\xi_0} \left[ 2 \frac{\varepsilon + 1}{\sqrt{1 + \varepsilon/2}} - 2 \right],
\end{aligned} \quad (12)$$

где  $\varepsilon = \Delta l / \xi_0$ . Таким образом, умножая уравнение

$$\frac{\partial n(l, t)}{\partial t} = I[n(l, t)]$$

на  $l$  и интегрируя по  $l$ , а также учитывая, что  $\int l I_0[n(l, t)] dl = 0$ , получаем уравнение для  $\mathcal{L}(t)$ :

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = -\Delta l b_m V_i \mathcal{L}^2(t) - 2b_s V_i \mathcal{L}(t) \frac{1}{\xi_0} \left[ 2 \frac{\varepsilon + 1}{\sqrt{1 + \varepsilon/2}} - 2 \right],$$

которое при  $\varepsilon \lesssim 1$  можно, разложив выражение в квадратных скобках в ряд около  $\varepsilon = 0$ , записать в виде

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = -b_m V_i \Delta l \mathcal{L}^2(t) - \frac{3b_s V_i \Delta l}{\xi_0^2} \mathcal{L}(t), \quad (13)$$

где для  $V_i$  имеет место оценка  $V_i \sim \kappa / \xi_0$ . Полученное уравнение определяет закон убывания плотности вихревых нитей за счет излучения при пересоединении. Отметим, что уравнение (13) для первого момента распределения  $n(l, t)$ , являясь точным для модели (8), не содержит высших моментов при любых значениях параметров  $\Delta l$ ,  $\xi_0$ , в частности, для высоких плотностей турбулентности. Таким образом, уравнение (13) может описывать быстрые, существенно нестационарные режимы эволюции вихревого клубка, когда распределение вихревых петель по длинам существенно отличается от (4) и соотношение (6) не выполняется. Важно подчеркнуть, что это свойство интеграла столкновений (8) обеспечивается специальным (линейным) видом коэффициентов  $A(l_1, l_2, l)$  и  $B(l_1, l_2, l)$  и нарушается для других моделей случайного блуждания вихревых нитей [11].

В случае же малых  $\Delta l$ ,  $1/\xi_0$ , когда интеграл столкновений  $I[n(l, t)]$  мал и эволюция турбулентного состояния оказывается настолько медленной, что выполняется соотношение (6), можно записать уравнение, описывающее уменьшение плотности вихревых нитей за счет пересоединений в квазистационарном режиме:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = -\kappa \Delta l \sqrt{\frac{3}{2C_{VLD}}} \left( b_m + \frac{9b_s}{2C_{VLD}} \right) \mathcal{L}^{\frac{5}{2}}(t).$$

Этот результат является ожидаемым, поскольку в [9] было получено выражение для частоты пересоединений в стационарном состоянии (4):

$$\dot{N}_{\text{rec}} = C_{\text{rec}} \kappa \mathcal{L}^{\frac{5}{2}},$$

где  $C_{\text{rec}}$  – величина порядка 0.1–0.5.

Для обычных плотностей вихревых нитей в жидком гелии  $\mathcal{L} \sim 10^9 \text{ м}^{-2}$  при длине когерентности  $\sim 0.18 \cdot 10^{-9} \text{ м}$  величину  $\xi_0$  можно оценить как  $1/\xi_0 \sim 10^{-5}$ . В этом случае коэффициенты при  $\mathcal{L}(t)$  и  $\mathcal{L}^2(t)$  в уравнении (13) малы по сравнению с  $C_{\text{Vinen}}$  и рассматриваемый механизм не играет существенной роли в распаде турбулентности.

Численные эксперименты [10] показывают, что излучение фононов при пересоединении приобретает значение лишь при высоких плотностях вихревых нитей, характерных для ранних стадий распада турбулентного состояния в бозе-конденсате. Уравнение (13) позволяет оценить характерное время распада турбулентного состояния в неквазистационарном режиме. Решение задачи Коши для уравнения (13) имеет вид

$$\mathcal{L}(t) = \quad (14)$$

$$\frac{\mathcal{L}(0) 3b_s V_l \Delta l / \xi_0^2}{3b_s V_l \Delta l / \xi_0^2 e^{3b_s V_l \Delta l / \xi_0^2 t} + \mathcal{L}(0) b_m V_l \Delta l (e^{3b_s V_l \Delta l / \xi_0^2 t} - 1)}.$$

При  $t \ll \xi_0^2 / 3b_s V_l \Delta l$  решение имеет характер  $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(0) / (1 + b_m V_l \Delta l \mathcal{L}(0) t)$ , а время убывания величины  $\mathcal{L}$  вдвое равно

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\xi_0}{\mathcal{L}(0) b_m \kappa \Delta l} = \\ &= \frac{3}{2b_m C_{\text{VLD}}} \frac{\xi_0^3}{\kappa \Delta l} = \frac{\xi_0^3}{\kappa \Delta l} \frac{3}{0.86b_s} \sim \mathcal{L}(0)^{-3/2} \end{aligned} \quad (15)$$

в предположении, что для начального состояния выполнено (6). При больших  $t$  ( $t \geq \xi_0^2 / 3b_s V_l \Delta l$ ) величина  $\mathcal{L}$  убывает экспоненциально:

$$\mathcal{L}(t) = \frac{\mathcal{L}(0) 3b_s V_l \Delta l / \xi_0^2}{3b_s V_l \Delta l / \xi_0^2 + b_m V_l \Delta l \mathcal{L}(0)} e^{-3b_s V_l \Delta l / \xi_0^2 t}$$

с характерным временем

$$\tau_2 = \frac{\xi_0^3}{\kappa \Delta l} \frac{1}{3b_s} \sim \mathcal{L}(0)^{-3/2}, \quad (16)$$

таким, что  $\tau_1 / \tau_2 \sim 10$ .

При распаде согласно уравнению Вайнена, время, за которое величина  $\mathcal{L}$  уменьшается в два раза, равно

$$\tau = \frac{\xi_0^2}{\kappa} \frac{3}{2C_{\text{VLD}} C_{\text{Vinen}}} \sim \mathcal{L}(0)^{-1}$$

и, в отличие от (15), (16), зависит от начальной средней кривизны нитей не кубично, а квадратично. Таким образом, при достаточно больших плотностях вихревых нитей механизм распада, связанный с излучением фононов при пересоединении, будет превалировать и обеспечивать убывание  $\mathcal{L}(t)$  согласно экспоненциальному закону, а не по закону  $\mathcal{L}(t) \sim 1/(t+a)$ .

Следует отметить, что уравнение (13) никак не связано с классическим уравнением Вайнена; из его вида нельзя сделать выводов о спектре и о режиме турбулентности [13–15]. Кроме того, результаты, полученные с использованием данного подхода, не должны существенно зависеть от режима турбулентности. Действительно, процессы пересоединения, приводящие к образованию фононов, имеют место на всех масштабах турбулентности, поэтому потери длины вихревых нитей не должны сильно зависеть от наличия или отсутствия колмогоровского каскада [15]. Интересно также отметить появление в уравнении распада турбулентности линейного по плотности нитей (энергии турбулентного состояния) члена, характерного для механизмов диссипации, действующих на всех масштабах турбулентного движения [14].

В [13, 15, 18] показано, что для развитой стационарной турбулентности в сверхтекучей жидкости выполнен закон Колмогорова. В этих же работах получено условие, при котором вихревые нити локально поляризованы и имеет место каскад Колмогорова:

$$\text{Re}_s > 1/q^2, \quad (17)$$

где  $\text{Re}_s = UR/\kappa$ ,  $U$  и  $R$  – характерная скорость и характерный линейный размер крупномасштабного движения жидкости,  $q$  – безразмерная постоянная, зависящая от температуры. В данной работе обсуждается случай сильно нестационарного режима распада турбулентности при достаточно малых температурах. Таким образом, нарушается как условие стационарности, так и условие (17) применимости каскада Колмогорова, что дает основания ожидать нарушения закона Колмогорова в рассматриваемой ситуации. Нарушение условия (17) определяет границу применимости изучаемой модели при более высоких температурах и при наличии нормальной компоненты, при его нарушении оправдана модель случайного блуждания вихревых нитей.

Численное моделирование, выполненное в [16], может рассматриваться в качестве иллюстрации к последнему утверждению. Обнаруженное в экспериментах [17] различие масштабов времен формирования и распада решетки вихрей, вероятно, может быть связано с двумя режимами распада: нестацио-

нарным, проходящим в основном за счет излучения фононов при пересоединении, и квазистационарным, когда этот эффект мал и турбулентность распадается за счет волн Кельвина согласно уравнению Вайнена. Для выяснения соотношения между этими режимами было бы интересно экспериментально измерить плотность и изучить структуру вихревого клубка на ранних стадиях развития турбулентности, когда величина  $\mathcal{L}$  велика. В [17] для сформировавшейся решетки вихрей  $\mathcal{L} \sim 1.5 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-2}$  при длине когерентности  $\sim 0.2 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ , так что  $\xi_0 \sim 40$ . Используя формулы для  $\tau$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и различие на два порядка времен формирования и распада решетки, можно оценить плотность вихревых нитей, возникающую на некотором этапе развития турбулентности в бозе-конденсате как  $\mathcal{L} \sim 10^{12} \text{ м}^{-2}$ .

Было бы также интересно провести численное моделирование процесса распада турбулентного состояния, не удовлетворяющего (6), и изучить зависимость величины

$$\tau_1 = \frac{\xi_0}{\mathcal{L}(0)b_m \kappa \Delta l}$$

как от  $\xi_0$ , так и от  $\mathcal{L}(0)$ .

Автор глубоко благодарен главному научному сотруднику профессору С.К.Немировскому за полезные обсуждения и ценные замечания и Ф.В.Шугаеву за внимание к работе.

1. W. F. Vinen and J. J. Niemela, *J. Low Temp. Phys.* **516**, 167 (2002).
2. S. L. Davies, P. C. Hendry, and P. V. E. McClintock, *Physica B* **280**, 43 (2000).
3. D. C. Samuels and C. F. Barenghi, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4381 (1998).
4. W. F. Vinen, *Phys. Rev. B* **61**, 1410 (2000).
5. B. V. Svistunov, *Phys. Rev. B* **52**, 3647 (1995).
6. J. Koplik and H. Levine, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1375 (1993).
7. E. J. Copeland, T. W. B. Kibble, and D. A. Steer, *Phys. Rev. D* **58**, 043508 (1998).
8. J. Magueijo, H. Sandvik, and D. A. Steer, *Phys. Rev. D* **60**, 103514 (1999).
9. S. K. Nemirovskii, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 015301 (2006).
10. M. Leadbeater, T. Winiecki, D. C. Samuels et al., *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1410 (2001).
11. S. K. Nemirovskii, *cond-mat/0505441*.
12. D. A. Steer, Ph.D. thesis, University of London, 1997.
13. V. S. L'vov, S. V. Nazarenko, and G. E. Volovik, *JETP Lett.* **80**, 479 (2004).
14. V. S. L'vov, S. V. Nazarenko, and L. Skrbek, *nlin.CD/0606002*.
15. A. P. Finne, V. B. Eltsov, R. Hanninen et al., *cond-mat/0606619*.
16. M. Leadbeater, D. C. Samuels, C. F. Barenghi, and C. S. Adams, *Phys. Rev. A* **67**, 015601 (2003).
17. J. R. Abo-Shaer, C. Raman, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 070409 (2002).
18. G. E. Volovik, *JETP Lett.* **78**, 1021 (2003).