

# Механизм коллапса конденсатной волновой функции в бозе-ферми-смеси с притяжением между компонентами

А. М. Белемук, В. Н. Рыжов<sup>1)</sup>, С. Т. Чуи<sup>+</sup>

Институт физики высоких давлений им. Л.Ф.Вережагина РАН, 142190 Троицк, Московская обл., Россия

<sup>+</sup>Bartol Research Institute, University of Delaware, Newark, DE 19716

Поступила в редакцию 27 июля 2006 г.

На основе эффективного гамильтониана для бозонной подсистемы в смеси вырожденных бозе- и ферми-атомов в ловушке проанализировано основное состояние системы. Численно найдены два типа решений модифицированного уравнения Гросса–Питаевского, реализующие стационарные и неустойчивые состояния бозе-газа. Построены зависимости химического потенциала и энергии от числа бозонов для этих двух типов решений. Проанализирован многозначный характер этих зависимостей и найдено критическое число бозонов, при котором наступает коллапс системы.

PACS: 03.75.Fi, 67.57.Fg, 67.90.Iz

Открытие бозе-эйнштейновской конденсации в экспериментах с парами атомов щелочных металлов, удерживаемых в магнитных ловушках и охлажденных до сверхнизких температур порядка  $10^{-6} \sim 10^{-7}$  К [1, 2], дало возможность непосредственно исследовать квантовых статистических свойств вещества, а также открыло новые теоретические направления исследований [3]. Одним из таких направлений является изучение смесей бозе-конденсатов и смеси бозе-газа с ферми-газом.

Разреженные смеси бозонных и фермионных атомов получают, используя охлаждение паров смеси изотопов щелочных атомов в ловушке [4, 5]. Эксперимент позволяет детально исследовать влияние бозон-фермионного взаимодействия на равновесные свойства смеси как в случае взаимного отталкивания, так и притяжения между компонентами смеси. Особый интерес представляет возможность образования фермионных пар и переход ультрахолодного ферми-газа в сверхпроводящее состояние [6–8]. Бозонная компонента используется в таких системах в качестве буфера, взаимодействие с которым позволяет эффективно охлаждать фермионные атомы (sympathetic cooling) в области перекрытия обеих компонент.

Теоретически равновесные свойства бозон-фермионной смеси исследовались в приближении Томаса–Ферми [9], с помощью самосогласованной процедуры решения модифицированного уравнения Гросса–Питаевского (ГП), учитывающей распределение фермионной плотности [10], на основе численных расчетов, использующих метод детерминантов

Слэтера [11]. Исследовались также динамические свойства смеси в рамках приближения хаотических фаз [12, 13] и свойства вихревого состояния [14].

Было установлено, что отталкивание компонент может привести к пространственному разделению бозонной и фермионной компонент [10, 11, 15], причем выталкиваться на периферию может как бозонная, так и фермионная компонента. В случае притяжения между компонентами состояние смеси становится нестабильным относительно коллапса, когда энергия эффективного притяжения между бозонами становится больше кинетической энергии и энергии отталкивательного взаимодействия бозонных атомов друг с другом. Коллапс экспериментально наблюдался в смеси  $^{40}\text{K}$ – $^{87}\text{Rb}$  [5]. Было обнаружено, что существует некоторое критическое число бозонных атомов  $N_{cr}$ , при котором начинает происходить коллапс бозонного и фермионного облака.

В настоящей работе мы исследуем нестабильность бозон-фермионной системы и условия возникновения коллапса на основе эффективного гамильтониана для бозонной подсистемы [16, 17]. Ранее [18] анализ проводился в рамках приближения Томаса–Ферми и на основе вариационной бозонной волновой функции. В настоящей работе мы построим численные решения модифицированного уравнения ГП, что позволяет непосредственно исследовать эволюцию бозонного распределения в сторону коллапса.

При выводе эффективного бозонного гамильтониана [16, 17] используется представление статсуммы большого канонического распределения для бозе-ферми-смеси в виде функционального интеграла [19, 20]

<sup>1)</sup>e-mail: ryzhov@hppi.troitsk.ru

$$Z = \int D[\phi^*]D[\phi]D[\psi^*]D[\psi] \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar}(S_B(\phi^*, \phi) + S_F(\psi^*, \psi) + S_{int}(\phi^*, \phi, \psi^*, \psi)) \right\}. \quad (1)$$

Интегрирование проводится по бозонным и фермионным полям  $\phi(\tau, \mathbf{r})$  и  $\psi(\tau, \mathbf{r})$ , описывающим соответственно бозе- и ферми-компоненту смеси. Действие для бозе-газа имеет вид

$$S_B(\phi^*, \phi) = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int d\mathbf{r} \left\{ \phi^*(\tau, \mathbf{r}) \left( \hbar \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_B} + V_B(\mathbf{r}) - \mu_B \right) \phi(\tau, \mathbf{r}) + \frac{g_B}{2} |\phi(\tau, \mathbf{r})|^4 \right\}. \quad (2)$$

Действие для ферми-газа атомов, находящихся в одном и том же спиновом состоянии, что запрещает взаимное  $s$ -рассеяние ферми-атомов, имеет такой же вид, как и для невзаимодействующего ферми-газа:

$$S_F(\psi^*, \psi) = \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int d\mathbf{r} \left\{ \psi^*(\tau, \mathbf{r}) \left( \hbar \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_F} + V_F(\mathbf{r}) - \mu_F \right) \psi(\tau, \mathbf{r}) \right\}. \quad (3)$$

Слагаемое, описывающее взаимодействие между компонентами бозе-ферми-смеси имеет вид

$$S_{int}(\phi^*, \phi, \psi^*, \psi) = g_{BF} \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int d\mathbf{r} |\psi(\tau, \mathbf{r})|^2 |\phi(\tau, \mathbf{r})|^2, \quad (4)$$

где  $g_B = 4\pi\hbar^2 a_B/m_B$  и  $g_{BF} = 2\pi\hbar^2 a_{BF}/m_I$ ,  $m_I = m_B m_F / (m_B + m_F)$ ,  $a_B$  и  $a_{BF}$  – амплитуды  $s$ -рассеяния при бозон-бозонном и бозон-фермионном рассеяниях.

Параметры  $\mu_B$  и  $\mu_F$  задают соответственно химический потенциал бозонной и фермионной подсистем. Химический потенциал идеального ферми-газа в ловушке зависит от числа фермионов как  $\mu_F = \hbar\omega_F (6\lambda N_F)^{1/3}$  [21]. Атомы находятся во внешнем потенциале изотропной гармонической ловушки:

$$V_B(\mathbf{r}) = \frac{m_B \omega_B^2}{2} r^2, \quad V_F(\mathbf{r}) = \frac{m_F \omega_F^2}{2} r^2,$$

где  $m_B$  и  $m_F$  – соответственно массы бозонных и фермионных атомов. Параметры потенциала ловушки  $\omega_B$  и  $\omega_F$  подобраны так, что  $m_B \omega_B^2/2 = m_F \omega_F^2/2$ , следовательно,  $\omega_F = \sqrt{m_B/m_F} \omega_B$ .

Интегрирование по ферми-полям позволяет ввести эффективный функционал энергии подсистемы бозонов, содержащий только конденсатную волновую функцию подсистемы бозонов  $\phi(\mathbf{r})$  [16, 17]:

$$H_{\text{eff}}[\phi] = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m_B} |\nabla\phi|^2 + (V_{\text{eff}}(\mathbf{r}) - \mu_B) |\phi|^2 + \frac{g_{\text{eff}}}{2} |\phi|^4 + \frac{g_{\text{eff}}^{BF}}{3} |\phi|^6 \right\}, \quad V_{\text{eff}} = k_0 \frac{m_B \omega_B^2}{2} r^2, \quad (5)$$

где

$$k_0 = \left( 1 - \frac{3}{2} \kappa \mu_F^{1/2} g_{BF} \right), \quad g_{\text{eff}} = g_B - \frac{3}{2} \kappa \mu_F^{1/2} g_{BF}^2, \quad (6)$$

$$g_{\text{eff}}^{BF} = \frac{3\kappa}{8\mu_F^{1/2}} g_{BF}^3, \quad \kappa = \frac{\sqrt{2} m_F^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}.$$

Волновая функция  $\phi(\mathbf{r})$  нормирована на число атомов в конденсате  $\int |\phi(\mathbf{r})|^2 d^3r = N$ . Мы рассматриваем предел  $T \rightarrow 0$ , поэтому  $N$  практически совпадает с полным числом атомов в ловушке.

Первые три слагаемых функционала  $H_{\text{eff}}[\phi]$  имеют обычный вид гамильтониана Гросса–Питаевского. Взаимодействие с фермионной подсистемой приводит к изменению частоты потенциала ловушки, а также ослаблению бозон-бозонного отталкивания. При бозон-фермионном притяжении бозонные атомы должны вести себя так, как если бы находились в удерживающем потенциале с несколько большей частотой. Последнее слагаемое отвечает трехчастичным упругим столкновениям, вызванным бозон-фермионным взаимодействием. В отличие от неупругих трехчастичных столкновений, которые ведут к рекомбинации и вылету быстрых частиц из системы [22], это слагаемое при  $g_{BF} < 0$  ведет к увеличению плотности конденсата в центре ловушки. Положительная кинетическая энергия и энергия отталкивания бозонов стабилизируют систему. Однако если плотность в центре ловушки становится слишком большой, то кинетическая энергия и энергия отталкивания бозонов не могут больше компенсировать отрицательное притяжение, и происходит коллапс газа. Как и в случае бозе-газа с притяжением, коллапс в смеси происходит, когда число частиц в конденсате превысит некоторое критическое значение  $N_{cr}$ .

Выбирая в качестве единиц длины и энергии параметры гармонического потенциала ловушки  $a_{\perp} = \sqrt{\hbar m_B / \omega_B}$  и  $\hbar\omega_B$  и перемасштабируя пространственные координаты, энергию и волновую функцию  $\mathbf{r} = a_{\perp} \mathbf{r}'$ ,  $E = \hbar\omega_B E'$ ,  $\phi(\mathbf{r}) = \sqrt{1/a_{\perp}^3} \phi'(\mathbf{r}')$ , записываем эффективный гамильтониан в безразмерном виде (штрихи опускаем):

$$H_{\text{eff}} = \int \left\{ \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + \left( k_0 \frac{r^2}{2} - \mu_B \right) |\phi|^2 + \frac{u}{4} |\phi|^4 + \frac{v}{6} |\phi|^6 \right\} d^3r, \quad (7)$$

где мы ввели безразмерные параметры  $u = 2g_{\text{eff}}/a_{\perp}^3 \hbar\omega_{\perp}$  и  $v = 2g_{\text{eff}}^{BF}/a_{\perp}^6 \hbar\omega_{\perp}$ .

Варьирование этого функционала  $\delta H_{\text{eff}}/\delta\phi^* = 0$  приводит к модифицированному уравнению ГП:

$$\left(-\frac{\nabla^2}{2} + k_0 \frac{r^2}{2} - \mu_B + \frac{u}{2}|\phi|^2 + \frac{v}{2}|\phi|^4\right)\phi = 0. \quad (8)$$

Конкретно для смеси  $^{87}\text{Rb}$  и  $^{40}\text{K}$  мы используем следующие значения параметров [5]:  $a_B = 5.25$  нм,  $a_{BF} = -19.4$  нм,  $N_F \approx 2 \cdot 10^4$ ,  $\omega_B = 2\pi \cdot 215$  Гц. При таких значениях параметров характерная ширина распределения конденсата  $a_{\perp} = 735$  нм, химический потенциал фермионов  $\mu_F \approx 31 \hbar\omega_B$ ,  $\omega_F \approx 1.47 \omega_B$ ,  $k_0 = 1.07$ ,  $u = 0.11$ ,  $v = -0.0003$ . Ввиду малого отличия  $k_0$  от единицы мы далее будем считать, что  $k_0 = 1$ . Отметим также, что мы ищем действительные решения уравнения (8), отвечающие основному состоянию. Итак, приходим к уравнению ( $\mu \equiv \mu_B$ )

$$\Delta\phi = (r^2 - 2\mu + u\phi^2 + v\phi^4)\phi. \quad (9)$$

Аналогичное уравнение, но в контексте стабилизации бозе-газа с притяжением ( $u < 0$ ) за счет трехчастичных столкновений ( $v > 0$ ) рассматривалось в работе [23].

Рассмотрим вначале аналитическое решение уравнения (9) в приближении Томаса–Ферми (ТФ), когда членом с кинетической энергией можно пренебречь. Профиль плотности имеет вид

$$\phi_{TF}^2(r) = n_{cr} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{R^2 - r^2}{R_{cr}^2}} \right], \quad R^2 = 2\mu,$$

$$R_{cr}^2 = \frac{u^2}{4|v|}, \quad n_{cr} = \frac{u}{2|v|}, \quad R \leq R_{cr},$$

где решение рассматривается на отрезке  $0 \leq r \leq R$ .

Удобно параметризовать решения величиной центральной плотности  $n_c = \phi^2(0)$ , перемасштабированной множителем  $u$ , то есть параметром  $u_0 \equiv un_c$ . Вводим также  $v_0 \equiv vn_c^2$ . В приближении ТФ эти параметры связаны с химическим потенциалом простым соотношением  $2\mu_{TF} = u_0 + v_0$ . Выражая параметры томас-фермиевского приближения через  $u_0$  и  $v_0$ , легко увидеть, что при фиксированном значении  $|v|/u^2$  отношение  $R^2/R_{cr}^2$  как функция  $u_0$

$$\frac{R^2}{R_{cr}^2} = \frac{u_0 \left(1 - \frac{|v|}{u^2} u_0\right)}{\frac{u^2}{4|v|}}$$

имеет вид перевернутой параболы, положительное значение которой лежит в интервале  $0 < u_0 < u^2/|v|$ .

При  $u_{0cr} = u^2/2|v|$  отношение  $R^2/R_{cr}^2$  достигает максимального значения, равного единице. В этом случае томас-фермиевское решение вырождается в линейную зависимость  $\phi_{TF}(r) = n_{cr}(1 - r)$ ,  $r < R_{cr}$ , с максимальным значением плотности в центре ловушки  $n_c = n_{cr}$ . По наступившему критическому режиму определялось критическое число бозонов  $N_{cr}$  [18]. Отметим, что существуют два значения параметра  $u_0$  из интервала  $0 < u_0 < u^2/|v|$ , симметрично расположенные относительно  $u_{0cr}$  и отвечающие одному и тому же решению  $\phi_{TF}(r)$ . Для выбранных параметров задачи  $u_{0cr} \approx 16.7$ .

На рис.1 показан типичный профиль волновой функции конденсата в приближении ТФ. Видно, что

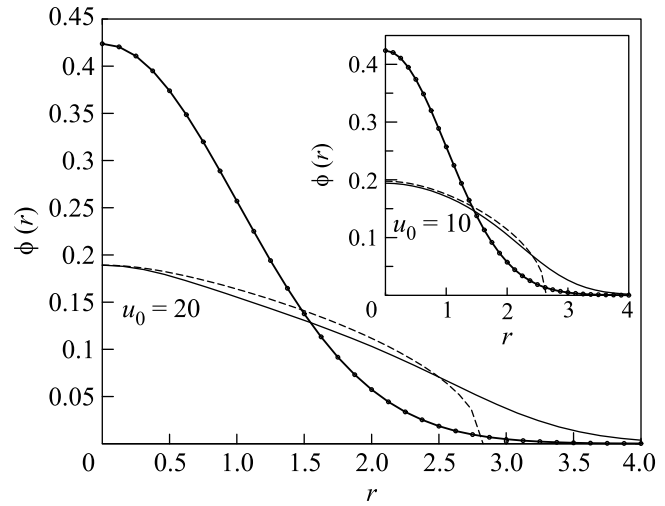


Рис.1. Волновая функция бозе-конденсата (нормированная на 1), полученная на основе численного решения (сплошная линия), и аналитическое решение в приближении ТФ (штриховая линия) для параметра  $u_0 = 20$  (на вставке для  $u_0 = 10$ ). Для сравнения показано основное состояние изотропного гармонического осциллятора  $\phi_{ho}(r)$ , отвечающее бозе-газу без взаимодействия ( $u = 0$ ,  $v = 0$ ) (линия с кружком). Расстояние  $r$  приведено в единицах  $a_{\perp}$

приближение ТФ хорошо работает в области значений параметра  $u_0 = 10 \sim 20$ , относительно близких к  $u_{0cr}$ . Для сравнения показано также решение для изотропного гармонического осциллятора  $\phi_{ho}(r) = \pi^{-3/4} \exp(-r^2/2)$ , которое отвечает основному состоянию невзаимодействующего бозе-газа ( $u = 0$ ,  $v = 0$ ). Отметим, что все волновые функции, которые будут представлены на рисунках, нормированы на единицу.

Численные решения уравнения (9) зависят параметрически от  $u_0$  и  $v_0$ . Поскольку  $v_0 = (v/u^2)u_0^2$ , то при фиксированном  $(v/u^2)$  решение зависит только

от одного параметра  $u_0$ , то есть от величины центральной плотности. Химический потенциал, который определяется из условия  $\phi(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +\infty$ , также будет зависеть от  $u_0$  как от параметра:  $\mu = \mu(u_0)$ . После определения  $\phi(r)$  находим из условия нормировки число частиц  $N(u_0)$  и из явного вида функционала (7) эффективную энергию основного состояния  $E_{\text{eff}}(u_0)$  и значение энергии  $E(u_0) = E_{\text{eff}} + \mu N$ . С термодинамической точки зрения  $E_{\text{eff}}$  совпадает при  $T = 0$  с  $\Omega$ -потенциалом системы, а соответственно,  $E$  со свободной энергией  $F = \Omega + \mu N$ .

На рис.2 показана эволюция профиля конденсата при увеличении центральной плотности. При  $u_0 \lesssim 20$  наблюдается поведение, характерное для бозе-газа

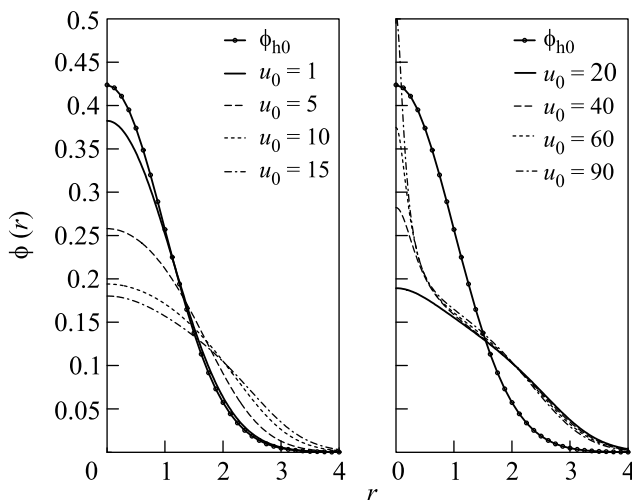


Рис.2. Эволюция профиля конденсатной волновой функции основного состояния при увеличении параметра  $u_0$ . Линия с кружком отвечает бозе-газу без взаимодействия

с отталкиванием – постепенное увеличение размеров конденсатного облака. Плотность облака становится все более плоской в центре ловушки, приближаясь к аналитическому решению ТФ. При  $u_0 \gtrsim 20$  тип решения качественно меняется – начинается рост центральной плотности.

Анализ картины коллапса в бозе-конденсате с притяжением [22, 24] показывает, что при  $N < N_{cr}$  существует два многочастичных состояния с одним и тем же числом частиц  $N$  и энергией  $E$ . Первое состояние описывает метастабильное состояние конденсата в ловушке и имеет пространственные размеры  $\sim a_{\perp}$ . Второе состояние является нестационарным состоянием, локализованным в намного меньшей области. Это то состояние, через которое происходит коллапс газа. Эти два состояния разделены энергетическим барьером, амплитуда перехода через который

экспоненциально зависит от  $(N - N_{cr})$ . При приближении  $N$  к критическому значению  $N_{cr}$  барьер исчезает, возникает неустойчивость, отвечающая наличию возбуждений с нулевой энергией. Построенное семейство решений  $\phi_{u_0}(r)$  полностью соответствует описанной картине поведения. При  $u_0 \lesssim 5$  распределение плотности близко к распределению плотности основного состояния гармонического осциллятора с характерным пространственным размером порядка  $\sim a_{\perp}$ . При  $10 \lesssim u_0 \lesssim 23$  конденсат имеет наибольшие пространственные размеры  $\sim 3a_{\perp}$ . При  $u_0 > 23$  наблюдается существенный рост центральной плотности в малой области около центра ловушки  $r \ll a_{\perp}$ . Решения с  $u_0 > 23$  мы связываем с нестационарными состояниями конденсата, через которые осуществляется коллапс волновой функции.

На рис.3 представлены графики эволюции химического потенциала  $\mu$ , числа частиц  $N$ , эффективной энергии  $E_{\text{eff}}$  и энергии  $E$  в зависимости от параметра  $u_0$ . Наибольшего значения  $\mu$  и  $N$  достигают при  $u_0 = 23$ . В этой точке наблюдается также и экстремум функций  $E_{\text{eff}}(u_0)$  и  $E(u_0)$ , при котором состояние конденсата становится неустойчивым. Известно, что достаточным условием наличия нулевой моды возбуждений служит наличие экстремума свободной энергии  $\partial F / \partial n_c = 0$ , рассматриваемой как функция плотности конденсата в центре ловушки  $n_c$  [25]. При выполнении этого условия не требуется энергии, чтобы непрерывно продеформировать один профиль плотности в другой, что означает существование нулевой моды флуктуаций плотности и ведет к неустойчивости системы. Все решения с  $u_0 > 23$  являются состояниями, отвечающими неустойчивому состоянию системы и ведут к коллапсу волновой функции конденсата.

На рис.4 показаны зависимости от числа частиц химического потенциала  $\mu(N)$ , энергии конденсата  $E(N)$  и эффективной энергии  $E_{\text{eff}}(N)$  и зависимость эффективной энергии от химического потенциала  $E_{\text{eff}}(\mu)$ . Можно проверить, что производная  $\partial E / \partial N$  совпадает с  $\mu$ , а  $\partial E_{\text{eff}} / \partial \mu = -N$ . Поэтому расчет является согласованным. Видно, что существует два состояния конденсата, отвечающие одному и тому же числу частиц, имеющие одинаковый химический потенциал и энергию. Первое (маркер – звездочка) соответствует устойчивому (метастабильному) состоянию и отвечает той части кривых  $\mu(u_0)$ ,  $E(u_0)$  и  $E_{\text{eff}}(u_0)$ , которые лежат на интервале  $0 < u_0 < 23$ . Начало этой ветви состояний выходит из области малых  $u_0$ , т.е. той области, где система заведомо устойчива (разреженный слабонепривлекательный бозе-газ с отталкиванием). Второе состоя-

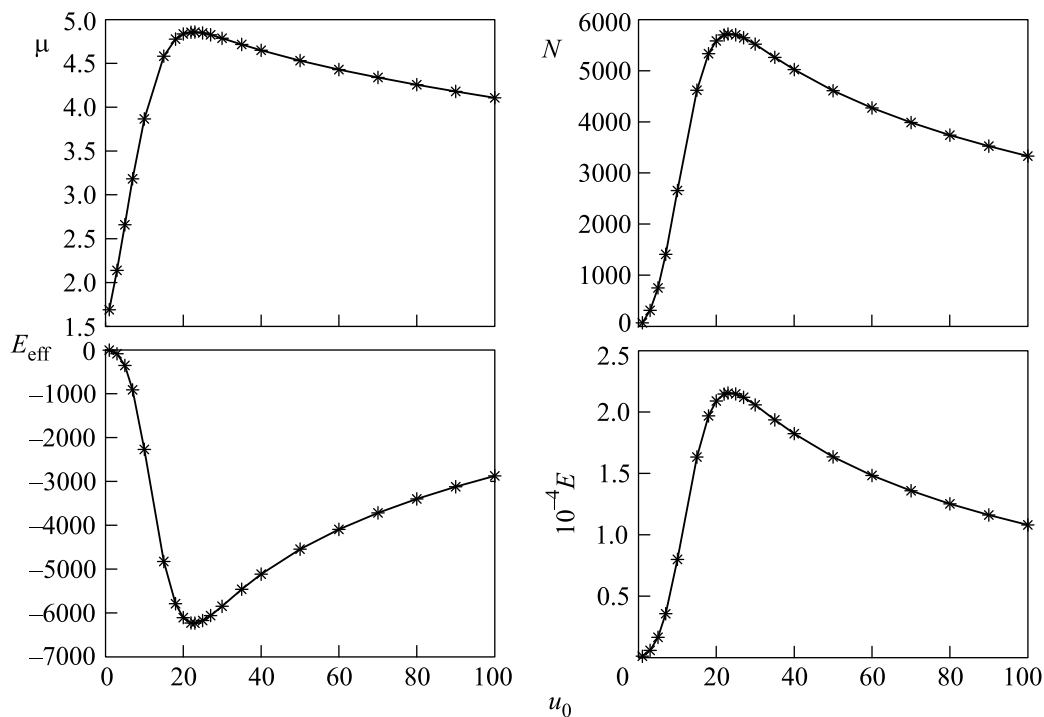


Рис.3. Зависимости химического потенциала  $\mu$ , числа частиц  $N$ , эффективной энергии  $E_{\text{eff}}$  и энергии  $E = E_{\text{eff}} + \mu N$  основного состояния от параметра  $u_0$  (все функции приведены в единицах  $\hbar\omega_B$ )

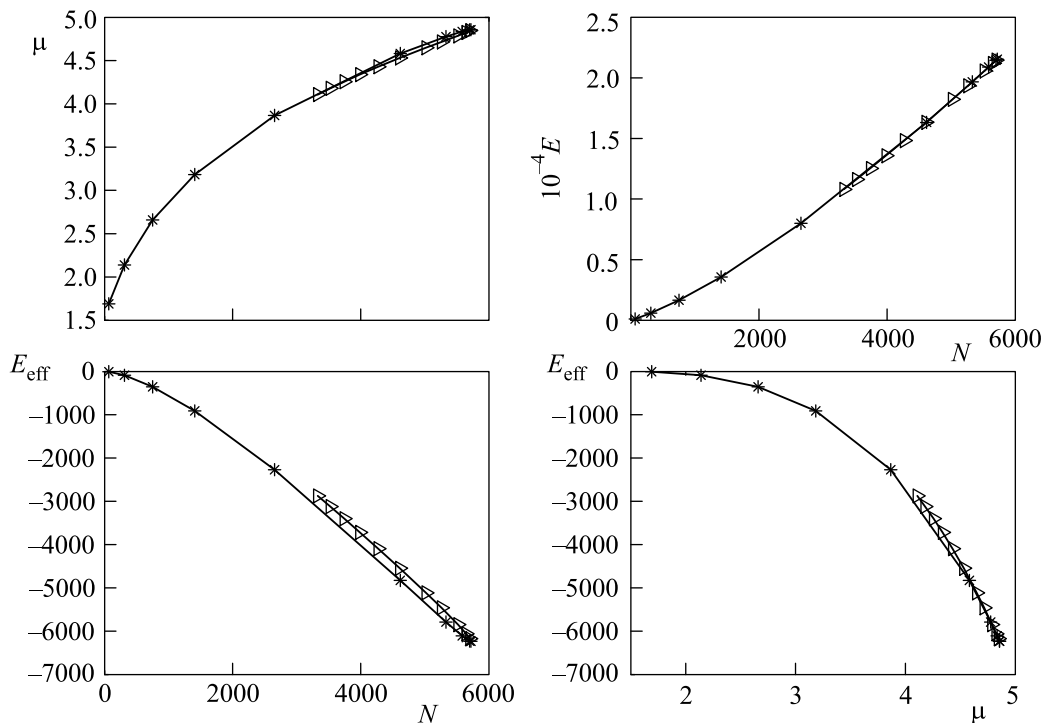


Рис.4. Зависимость химического потенциала  $\mu$ , энергии  $E$ , эффективной энергии  $E_{\text{eff}}$  от числа частиц  $N$  и зависимость эффективной энергии  $E_{\text{eff}}$  от химического потенциала. Кривая со звездочкой соответствует устойчивым состояниям бозе-конденсата ( $u_0 < 23$ ). Кривая с треугольником соответствует нестационарным состояниям, ведущим к коллапсу бозе-конденсата ( $u_0 > 23$ )

ние (маркер – треугольник) описывает нестационарное состояние, ведущее к коллапсу, и отвечает тем

частям кривых  $\mu(u_0)$ ,  $E(u_0)$  и  $E_{\text{eff}}(u_0)$ , которые лежат при  $u_0 > 23$ . Начало второй ветви состояний на-

ходится в точке неустойчивости системы. По физическому смыслу состояния, соответствующие резкому росту плотности частиц в центре ловушки, описывают состояние системы, ведущее к коллапсу. Отметим, что имеется небольшое отличие в эффективных энергиях построенных двух ветвей состояний, которое стремится к нулю при приближении  $N$  к  $N_{cr}$ .

Кривые  $\mu(N)$ ,  $E(N)$  и  $E_{\text{eff}}(N)$  имеют точку окончания, соответствующую наибольшему числу бозонов  $N_{cr} \sim 6000$ . Для сопоставления с экспериментом следует учесть асимметричность магнитной ловушки. Параметр частоты потенциала ловушки вдоль оси  $z$  есть  $\omega_{B,z} = \lambda\omega_B = 2\pi \cdot 16.3$  Гц. Поэтому найденное критическое число бозонов следует домножить на фактор  $\sim 1/\lambda \approx 13.2$ , что дает  $N_{cr} \sim 10^5$  в хорошем согласии с экспериментом [5].

В заключение отметим, что мы провели численный анализ модифицированного уравнения ГП, решения которого описывают состояния конденсатной волновой функции бозонной подсистемы в смеси бозе-и ферми-газов. Обнаружены два режима поведения, соответствующие стационарному (метастабильному) и неустойчивому (коллапсирующему) состояниям бозе-системы. Найденные зависимости химического потенциала, числа бозонов, эффективной энергии и энергии как функции центральной плотности  $n_c$  (или  $u_0$ ) демонстрируют наличие точки экстремума и, как следствие, многозначности функций  $\mu(N)$ ,  $E(N)$  и  $E_{\text{eff}}(N)$ . Функции  $\mu(N)$ ,  $E(N)$  и  $E_{\text{eff}}(N)$  имеют точку окончания, соответствующую критическому числу бозонов, при котором наступает коллапс системы. Найденное критическое число бозонов демонстрирует хорошее согласие с экспериментом.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты # 04-02-17367 и # 05-02-17621) и Фонда содействия отечественной науке.

- 
1. M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews et al., *Science* **269**, 198 (1995).
  2. C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollet, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).

3. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
4. F. Schreck, L. Khaykovich, K. L. Corwin et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080403 (2001).
5. G. Modugno, G. Roati, F. Riboli et al., *Science* **297**, 2240 (2002).
6. C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, *Nature* **424**, 47 (2003).
7. M. Greiner, C. A. Regal, and D. S. Jin, *Nature* **426**, 537 (2003).
8. S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer et al., *Science* **302**, 2101 (2003).
9. K. Molmer, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1804 (1998).
10. R. Roth, *Phys. Rev. A* **66**, 013614 (2002).
11. N. Nygaard and K. Molmer, *Phys. Rev. A* **59**, 2974 (1999).
12. P. Capuzzi, A. Minguzzi, and M. P. Tosi, *Phys. Rev. A* **68**, 033605 (2003).
13. A. Sinatra and Y. Castin, *Eur. Phys. J. D* **8**, 319 (2000).
14. D. M. Jezek, M. Barranco, M. Guilleumas et al., *Phys. Rev. A* **70**, 043630 (2004).
15. X. X. Yi and C. P. Sun, *Phys. Rev. A* **64**, 043608 (2001).
16. S. T. Chui and V. N. Ryzhov, *Phys. Rev. A* **69**, 043607 (2004).
17. S. T. Chui, V. N. Ryzhov, and E. E. Tareyeva, *JETP Lettes* **80**, 274 (2004).
18. A. M. Belemuk, N. M. Chtchelkatchev, V. N. Ryzhov, and S. T. Chui, *Phys. Rev. A* **73**, 053608 (2006).
19. V. N. Popov, *Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics*, Reidel, Dordrecht, 1983.
20. H. T. C. Stoof, in *Coherent Atomic Matter Waves*, Proc. of the Les Houches Summer School Session LXXII, UJF NATO Advanced Study Institute, 1999, Eds. R. Kaiser, C. Westbrook, and F. David, EDP Sciences, Springer-Verlag, 2001, pp. 219-316.
21. D. A. Butts and D. S. Rokhsar, *Phys. Rev. A* **55**, 4346 (1997).
22. Yu. Kagan, A. E. Muryshev, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 933 (1998).
23. N. Akhmediev, M. P. Das, and A. V. Vagov, *Aust. J. Phys.* **53**, 157 (2000).
24. Yu. Kagan, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2670 (1996).
25. M. Houbiers and H. T. C. Stoof, *Phys. Rev. A* **54**, 5055 (1996).