Письма в ЖЭТФ, том 85, вып. 2, с. 137 – 140 © 2007 г. 25 января

Сложность самоподобных иерархически соподчиненных ансамблей

А. И. Олемской[1)]

Институт прикладной физики НАН Украины, 40030 Сумы, Украина

Поступила в редакцию 30 октября 2006 г.

После переработки 7 декабря 2006 г.

В рамках обобщенного комбинаторного подхода определена мера сложности бесконечного набора самоподобных иерархически соподчиненных ансамблей. Показано, что с усилением иерархической связи сложность монотонно нарастает до значения, величина которого спадает с ростом дисперсии этой связи и уменьшением показателя ветвления иерархического дерева.

PACS: 02.50.–r, 05.20.Gg, 05.40.–a

Иерархическая структура представляет одну из универсальных особенностей строения физических, биологических, экономических и других сложных систем [1 – 5]. Их эволюция сводится к аномальной диффузии в ультраметрическом пространстве самоподобной иерархической системы [6], стационарное распределение по уровням которой определяется степенным законом Цаллиса, присущим неаддитивным ансамблям [7]. Известная особенность случайных иерархических систем состоит в том, что при переходе на более глубокий уровень каждый статистический ансамбль разделяется на более мелкие поданcамбли, которые, в свою очередь, состоят из еще более мелких субансамблей следующего уровня, и т.д. Со статистической точки зрения, набор указанных (под)ансамблей определяется *сложностью* системы, которая по аналогии с энтропией характеризует беспорядок иерархической связи. Предлагаемая работа посвящена определению такой сложности для самоподобных иерархически соподчиненных ансамблей.

Согласно [7], неаддитивная статистика основывается на определении логарифмической и экспоненциальной функций равенствами

$$\ln_q(x) \equiv \frac{x^{1-q}-1}{1-q}, \quad \exp(x) \equiv [1+(1-q)x]_+^{\frac{1}{1-q}}; \qquad [y]_+ \equiv \max(0,y), \quad q \le 1, \tag{1}$$

которые при параметре деформации $q \to 1$ приводят к обычным функциям. Определяя q-деформированные произведения и частное положительных величин x, y

$$x \otimes_q y = [x^{1-q} + y^{1-q} - 1]_+^{\frac{1}{1-q}}, \qquad x \oslash_q y = [x^{1-q} - y^{1-q} + 1]_+^{\frac{1}{1-q}}; \quad x,y>0, \tag{2}$$

легко убедиться, что они удовлетворяют обычным свойствам: $\ln_q(x \otimes_q x) = \ln_q x + \ln_q y$, $\ln_q(x \oslash_q x) = \ln_q x - \ln_q y$; $\exp_q(x) \otimes_q \exp_q(y) = \exp_q(x+y)$, $\exp_q(x) \oslash_q \exp_q(y) = \exp_q(x-y)$.

В рамках комбинаторного подхода q-деформированная статистика сводится к рассмотрению обобщенного факториала $N!_q = 1 \otimes_q \ldots \otimes_q N$, логарифм которого имеет вид [8]

$$\ln_q(N!_q) = \frac{\sum_{i=1}^N i^{1-q} - N}{1-q}. \tag{3}$$

В термодинамическом пределе $N \to \infty$ стоящая здесь сумма оценивается интегралом, вычисление которого дает

$$\ln_q(N!_q) = \begin{cases} \dfrac{N}{2-q}\ln_q N - \dfrac{N}{2-q} + O(\ln_q N), & q \ne 2, \\ N - \ln N + O(1), & q = 2. \end{cases} \tag{4}$$

Определяя q-деформированный полиномиальный коэффициент равенством

$$\left(\begin{array}{c} N \\ N_1 \ldots N_k \end{array} \right)_q \equiv (N!_q) \oslash_q [(N_1!_q) \otimes_q \ldots \otimes_q (N_k!_q)], \tag{5}$$

где набор целых чисел N_i удовлетворяет условию $N = \sum_{i=1}^n N_i$, находим

$$\left(\begin{array}{c} N \\ N_1 \ldots N_k \end{array} \right)_q = \left[\sum_{i=1}^N i^{1-q} - \sum_{i_1=1}^{N_1} i_1^{1-q} - \ldots - \sum_{i_k}^{N_k} i_k^{1-q} + 1 \right]_+^{1/(1-q)}. \tag{6}$$

Отсюда, подобно (4), получаем выражение

$$\ln_q \left(\begin{array}{c} N \\ N_1 \ldots N_k \end{array} \right)_q \simeq$$

[1)]e-mail: alex@ufn.ru

$$\simeq \begin{cases} \dfrac{N^{2-q}}{2-q} C_{2-q}\left(\dfrac{N_1}{N},\dots,\dfrac{N_k}{N}\right), & q>0,\quad q\neq 2,\\ -C_1(N)+\sum\limits_{i=1}^{k} C_1(N_i), & q=2 \end{cases} \tag{7}$$

для энтропии Цаллиса

$$C_q(p_1,\dots,p_N)\equiv -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln_q p_i = -\frac{\sum_{i=1}^{N} p_i^{2-q}-1}{1-q}. \tag{8}$$

Поскольку в нашем случае состояния i сводятся к подансамблям, на которые разделяется полный статистический ансамбль, эта энтропия определяет сложность (complexity) иерархической системы.

Изложенный формализм легко обобщается на иерархические системы [9]. Допустим, N состояний верхнего уровня распределены по ансамблям $i = 1,\dots,n$, каждый из которых содержит N_i состояний. В свою очередь, N_i состояний сгруппированы в m_i подансамблей ij, содержащих по N_{ij} состояний, для которых выполняются соотношения $\sum_{j=1}^{m_i} N_{ij} = N_i$, $\sum_{i=1}^{n} N_i = N$.Тогда вместо полиномиального коэффициента (5) следует использовать выражение

$$\begin{pmatrix} N \\ N_{11}\dots N_{nm_n}\end{pmatrix}_q = \begin{pmatrix} N \\ N_1\dots N_n\end{pmatrix}_q \otimes_q$$

$$\otimes_q \begin{pmatrix} N_1 \\ N_{11}\dots N_{1m_1}\end{pmatrix}_q \otimes_q\dots\otimes_q \begin{pmatrix} N_n \\ N_{n1}\dots N_{nm_n}\end{pmatrix}_q, \tag{9}$$

логарифм которого дает

$$\ln_q \begin{pmatrix} N \\ N_{11}\dots N_{nm_n}\end{pmatrix}_q = \ln_q \begin{pmatrix} N \\ N_1\dots N_n\end{pmatrix}_q +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \ln_q \begin{pmatrix} N_i \\ N_{i1}\dots N_{nm_i}\end{pmatrix}_q. \tag{10}$$

В результате оценка (7) приводит к связи между сложностями ближайших иерархических уровней

$$C_Q(p_{11},\dots,p_{nm_n}) = C_Q(p_1,\dots,p_n)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N_n} p_i^Q C_Q\left(\frac{p_{i1}}{p_i},\dots,\frac{p_{im_i}}{p_i}\right), \tag{11}$$

распределения по состояниям которых заданы равенствами $p_{ij} = N_{ij}/N$, $p_i = N_i/N$ (здесь мы ввели физически определенный параметр неаддитивности $Q = 2-q$, $1\le Q\le 2$). Использование определения (8) и связи $p_i = \sum_{j_i=1}^{m_i} p_{ij_i}$, при условии $p_i - p_{ij_i} \ll p_i$ дает оценку

$$C_Q\left(\frac{p_{i1}}{p_i},\dots,\frac{p_{im_i}}{p_i}\right) \approx \frac{Q}{2}\sum_{j_i=1}^{m_i}\left(\frac{p_i-p_{ij_i}}{p_i}\right)^2, \tag{12}$$

с учетом которой находим

$$C_Q(p_{11},\dots,p_{nm_n}) - C_Q(p_1,\dots,p_n) \approx$$

$$\approx \frac{Q}{2}\sum_{i=1}^{N_n} p_i^{Q-2}\sum_{j_i=1}^{m_i}(p_i-p_{ij_i})^2. \tag{13}$$

Если статистические состояния распределены по микроканоническим ансамблям, то вероятности и соответствующие сложности определяются номером уровня n: $\{p_i\}_1^n \Rightarrow p_n$, $\{p_{ij_i}\}_1^{m_i} \Rightarrow p_{n+1}$; $C_Q(p_1,\dots,p_n)\Rightarrow C(n)$, $C_Q(p_{11},\dots,p_{nm_n})\Rightarrow C(n+1)$. В результате равенство (13) принимает простой вид:

$$C(n+1)-C(n) \approx \frac{Q(n+1)}{2} p_n^{Q-2}(p_{n+1}-p_n)^2. \tag{14}$$

Благодаря тому, что суммарная вероятность реализации состояний в кластере нижнего уровня $n+1$ равна вероятности реализации соответствующего состояния следующего уровня n ($\sum_{j_i=1}^{m_i} p_{ij_i} = p_i$), разность сложностей этих уровней $C(n+1)-C(n)$ оказывается пропорциональной не первой, а второй степени разности вероятностей $p_{n+1}-p_n$. Поэтому в континуальном пределе $n\to\infty$ приращение сложности $C(n+1)-C(n)\approx dC(n)$ пропорционально второй степени разности вероятностей $p_{n+1}-p_n \approx dp_n$, и разностное уравнение (14) не может быть сведено к дифференциальному уравнению, связывающему элементарные приращения сложности и вероятности. Однако можно использовать распределение [6]

$$\begin{aligned} p_n &= A[\Delta+(Q-1)(n+1)]^{-\frac{1}{Q-1}},\\ A &\equiv (2-Q)[(Q-1)+\Delta]^{\frac{2-Q}{Q-1}}, \end{aligned} \tag{15}$$

где параметр Δ характеризует степень разброса состояний иерархического ансамбля, самоподобие которого отражается степенным характером зависимости (15). Подставляя ее в равенство (14), в пределе $n \gg 1$ получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dC(n)}{dn} = \frac{QA^Q}{2}(n+1)[\Delta+(Q-1)(n+1)]^{-\frac{3Q-2}{Q-1}}. \tag{16}$$

С использованием граничного условия $C(n=0)=0$ интегрирование этого уравнения дает зависимость

$$C(n) = C_\infty - \frac{p_n^Q}{2(2Q-1)}\left[1+Q(n+1)\left(\frac{p_n}{A}\right)^{Q-1}\right], \tag{17}$$

где обозначено

$$C_\infty \equiv \frac{1}{2}\frac{(2-Q)^Q}{(Q-1)^{1+Q}}\frac{1+\Delta/(2Q-1)}{[1+\Delta/(Q-1)]^{1+Q}}. \qquad (18)$$

Вид полученного распределения сложности по иерархическим уровням показан на рис.1. Как и следова-

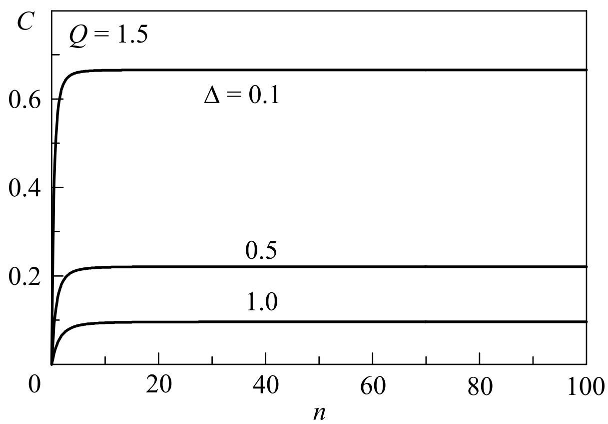

Рис.1. Зависимость сложности от номера иерархического уровня

ло ожидать, на верхнем уровне $n = 0$, где имеется единственный статистический ансамбль, сложность $C = 0$. С переходом на более глубокие уровни значение C монотонно возрастает до предельного значения (18), величина которого монотонно спадает с ростом дисперсии Δ и показателя $1 \le Q \le 2$.

Эволюция иерархического ансамбля определяется характерным масштабом диффузии $\tau_d = (\Delta^{2-Q}/D)n^Q\tau_0$ и временем выхода на стационарный режим $\tau = n^2\tau_0$, где D – коэффициент диффузии, τ_0 – время перехода между соседними уровнями [6]. При $t \ll \tau_d$ число уровней иерархического дерева самопроизвольно нарастает по закону аномальной диффузии $n(t) \approx Q^{1/Q}(t/\tau_0)^{1/Q}$, а с ростом времени в интервале $\tau_d \sim t \ll \tau$, когда аномальный дрейф и диффузия вносят соизмеримые вклады, реализуется нормальный режим $n(t) \approx \sqrt{2(t/\tau_0)}$. При $t \ll \tau$ распределение по иерархическим уровням спадает к стационарному (15) по степенному закону

$$p_n(t) = p_n\left[1 - (t/\tau_n)^{-\frac{1}{Q-1}}\right]_+, \qquad \tau_n \equiv (\Delta/QD)n\tau_0, \quad n \neq 0, \qquad (19)$$

в который трансформируется начальное распределение $p_n(t = 0) = \delta_{n0}$.

Нестационарное значение сложности определяется уравнением (16) при граничном условии $C(n, t = 0) = 0$ с $n \neq 0$. В результате приходим к обобщению стационарного распределения (17):

$$C(n,t) = \frac{p_n^Q(t)}{2(2Q-1)}\left\{\left[\left(\frac{p_0}{p_n}\right)^Q - 1\right] + \right.$$
$$\left. +Q\left[\left(\frac{p_0}{p_n}\right)^{2Q-1} - (n+1)\right]\left(\frac{p_n(t)}{A}\right)^{Q-1}\right\}. \qquad (20)$$

Подстановка равенств (15), (19) в (20) приводит к временной зависимости сложности, показанной на рис.2. В течение баллистического интервала $t \le \tau_n$

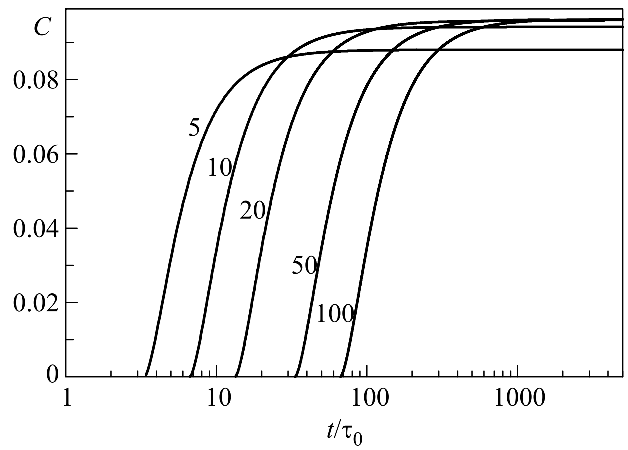

Рис.2. Временные зависимости сложности на различных иерархических уровнях (их номера указаны у кривых) при $\Delta = 1$, $Q = 1.5$ и $D = 1$

сложность сохраняет исходную величину $C = 0$, а с ростом времени $t > \tau_n$ быстро выходит на стационарное значение (17), ограниченное максимумом (18).

Проведенное рассмотрение показывает, что установление иерархической связи быстро повышает сложность статистического ансамбля до предельного значения (18): согласно выражениям (17), (20), это происходит как с ростом числа уровней иерархии, по которым стационарно распределены состояния системы, так и при перераспределении нестационарных состояний с течением времени. Хотя сложность определяется энтропией Цаллиса (8), их физическая природа совершенно различна: если для простых систем эта энтропия характеризует беспорядок в распределении наименьших структурных единиц (например, атомов), то в иерархических системах их роль играют подансамбли, на которые разделяется полный статистический ансамбль.

В общем случае поведение сложной системы определяется кластерной структурой всех иерархических уровней, однако свойство самоподобия позволяет ограничиться заданием типичного кластера и номера уровня n. Исследование различных иерархических деревьев показало [10], что возможны три их основных типа: вырожденное дерево, у которого на каждом уровне ветвится единственный узел, благодаря чему с ростом n число узлов нарастает по линейной зависимости; регулярное дерево, на каждом уровне которого все узлы ветвятся одинаковым образом и их число увеличивается экспоненциально; самоподобное дерево, у которого число узлов нарастает по степенному закону n^a с показателем $a > 1$. В первом случае вероятность реализации состояний на различных иерархических уровнях изменяется логарифмически медленно, во втором экспоненциально быстро и только в последнем обнаруживает присущее самоподобным системам степенное поведение типа (15) с показателем

$$\frac{1}{Q-1} = \frac{a-1}{d}, \quad a > 1, \tag{21}$$

где $d \leq 1$ – размерность ультраметрического пространства, геометрическим образом которого является иерархическое дерево [1]. Таким образом, параметр неаддитивности Q определяется показателем ветвления a: вырожденное ($a = 1$) и регулярное ($a = \infty$) деревья характеризуются предельными значениями $Q = \infty$ и $Q = 1$, а самоподобное распределение (15) с показателем $1 < Q < 2$ реализуется при $\infty > a > 1 + d$. Такая связь объясняет бесконечное нарастание сложности (18) при параметре неаддитивности $Q \to 1$ – при этом неограниченно возрастает показатель ветвления иерархического дерева ($a \to \infty$), приводя к предельной сложности системы.

Что касается дисперсии статистического ансамбля Δ, то ее рост приводит к монотонному спаданию сложности (18), поскольку разброс иерархической связи может только ослабить ее. Такое поведение в корне отличает иерархические системы от термодинамических, где рост температуры, увеличивающей разброс статистических состояний, способствует возрастанию энтропии. Укажем, что данное различие не является единственным следствием иерархической связи. Так, выше мы видели, что ее усиление за счет роста показателя ветвления a приводит к более быстрому спаданию вероятности реализации состояний с ростом номера уровня. В то же время, благодаря самопроизвольному росту числа уровней, автономная иерархическая система со временем не распадается, а самоорганизуется [6].

Автор благодарен рецензенту за ценные замечания, а также С.В. Кохану, В.И. Острику и Д.О. Харченко за плодотворные обсуждения.

1. R. Rammal, G. Toulouse, and M. A. Virasoro, Rev. Mod. Phys. **58**, 765 (1986).
2. В. С. Доценко, УФН **163**, No.6, 1 (1993).
3. A. I. Olemskoi, *Fractals in Condensed Matter Physics*, in Phys. Rev. **18**, Part 1, Ed. I. M. Khalatnikov, Gordon and Breach, London, 1996.
4. P. Holme, M. Huss, and H. Jeong, Bioinformatics **19**, 532 (2003).
5. R. N. Mantegna and H. H. Stanley, *An Introduction to Econophysics, Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
6. А. И. Олемской, Письма в ЖЭТФ **71**, 412 (2000).
7. M. Gellmann and C. Tsallis, *Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications*, Oxford University Press, Oxford, 2004.
8. H. Suyari, Physica A **368**, 63 (2006).
9. H. Suyari and T. Wada, arXiv:cond-mat/0608007.
10. A. I. Olemskoi and A. D. Kiselev, Phys. Lett. A **247**, 221 (1998).