Письма в ЖЭТФ, том 43, вып. 6, стр. 301 – 303 *25 марта 1986 г.*

ТЕРМОДИНАМИКА ДВУМЕРНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю.А.Бычков

Предложен метод вычисления статистической суммы двумерного электронного газа в сильном магнитном поле. Для потенциалов взаимодействия между частицами, мало меняющихся на магнитной длине получено явное выражение для величин, описывающих обменные эффекты при температуре $T \to 0$.

После открытия дробного квантового эффекта Холла (ДКЭХ) [1] появилось много работ, посвященных объяснению этого до сих пор загадочного явления. Не перечисляя все подходы, включающие известный метод пробных функций Лафлина [2], отметим рассмотренный в [3,4] метод статистической суммы (СС). С другой стороны, авторы [5] предложили принципиально новый подход к проблеме ДКЭХ. С помощью метода интегрирования по путям в [5] исследован вопрос о наличии в свободной энергии как функции плотности частиц особенностей, обусловленных обменными эффектами. В настоящей работе с помощью метода, отличного от [5], получены результаты, пересекающиеся с результатами этой работы. Развитый ниже метод основан на прямом вычислении СС взаимодействующих частиц в сильном магнитном поле H.

Задача состоит в нахождении СС системы

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}, \qquad \beta = 1/T, \tag{1}$$

где E_n – собственные значения энергии взаимодействующих частиц на низшем уровне Ландау. Предполагается, что взаимодействие не переводит частицы на другие уровни (характерная энергия парного взаимодействия гораздо меньше $\hbar\omega_c$, ω_c – циклотронная частота). В этом случае правая часть (1) есть

$$\sum_n \{ 1 - \beta V_{nn} + \frac{\beta^2}{2!} \sum_m V_{nm} V_{mn} \ldots \}, \tag{2}$$

V – потенциальная энергия взаимодействия частиц, а состояния n, m отвечают низшему уровню Ландау. В калибровке для векторного потенциала $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{H} \times \mathbf{r}$ соответствующие нормированные одночастичные волновые функции есть

$$\psi_m(z) = (2\pi 2^m m!)^{-1/2} z^m e^{-|z|^2/4}, \tag{3}$$

где $z = x + iy$, а магнитная длина $l_H = (c\hbar/eH)^{1/2}$ положена равной единице.

Проектирование матричных элементов взаимодействия на низший уровень Ландау приводит к следующему явному виду для произвольного члена ряда (2):

$$\frac{\beta^l}{l!} (-1)^l \int \prod_{i=1}^{N} d^2 z_i \prod_{j=1}^{N} d^2 z_{1j} \ldots \prod_{k=1}^{N} d^2 z_{lk} V(\mathbf{z}_1) V(\mathbf{z}_2) \ldots V(\mathbf{z}_l) \times$$

$$\times\ g(\mathbf{z},\mathbf{z}_1)g(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)\ldots g(\mathbf{z}_{l-1},\mathbf{z}_l)g^{(\mathcal{A})}(\mathbf{z}_l,\mathbf{z}').\qquad(4)$$

Здесь $d^2z = dxdy$, $\mathbf{z} = \{z_1, ..., z_N\}$, N – число частиц, $V(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} U(|z_i - z_j|)$,

$$g(\mathbf{z},\mathbf{z}') = \sum_n \Psi_n(\mathbf{z})\Psi_n^*(\mathbf{z}'),\qquad g^{(\mathcal{A})}(\mathbf{z},\mathbf{z}') = \sum_n \Psi_n^{(\mathcal{A})}(\mathbf{z})\Psi_n^{(\mathcal{A})*}(\mathbf{z}').\qquad(5)$$

В (5) функции $\Psi_n(\mathbf{z})$ соответствуют набору ортонормированных N – частичных волновых функций на низшем уровне Ландау без учета принципа Паули, в то время как функции $\Psi_n^{(\mathcal{A})}(\mathbf{z})$ являются антисимметричными относительно перестановок частиц. В выражении (4) действительно достаточно ввести одну функцию $g^{(\mathcal{A})}(\mathbf{z}_l, \mathbf{z})$, так как матричные элементы взаимодействия отличны от нуля только между волновыми функциями с одинаковой перестановочной симметрией.

С помощью выражения (3) нетрудно убедиться в том, что

$$g(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2) = \frac{1}{(2\pi)^N}\exp\left(\frac{1}{2}\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2^* - \frac{1}{4}|\mathbf{z}_1|^2 - \frac{1}{4}|\mathbf{z}_2|^2\right),\qquad(6)$$

где $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2^* = \sum_{i=1}^{N} z_{1i}z_{2i}^*$, $|\mathbf{z}|^2 = \sum_{i=1}^{N}|z_i|^2$. Функции $g(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)$ и $g^{(\mathcal{A})}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)$ связаны друг с другом достаточно очевидным соотношением:

$$g^{(\mathcal{A})}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2) = \frac{1}{N!}\sum_P \operatorname{sign}(P)\, g(\mathbf{z}_1, P\mathbf{z}_2).\qquad(7)$$

В (7) P – произвольная перестановка переменных $\{z_{2i}\}$, а $\operatorname{sign}(P)$ – ее знак.

Входящее в (4) произведение g-функций имеет вид:

$$\sum_P \operatorname{sign}(P)\exp\left\{-\frac{1}{4}|\mathbf{z}-\mathbf{z}_1|^2 - \frac{1}{4}|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2|^2 - \ldots - \frac{1}{4}|\mathbf{z}_l - P\mathbf{z}|^2 - \right.$$
$$\left. -\frac{i}{2}\sum_{i=1}^{N}[\mathbf{r}_i\times\mathbf{r}_{1i} + \mathbf{r}_{1i}\times\mathbf{r}_{2i} + \ldots + \mathbf{r}_{li}\times P\mathbf{r}_i]\,\mathbf{n}\right\},\qquad(8)$$

где $\mathbf{r}_j$ – двумерный радиус-вектор j-ой частицы, перпендикулярный $\mathbf{n} = \mathbf{H}/H$. Поскольку все характерные разности $|z_j - z_m| \sim 1$, то в случае медленно меняющегося на масштабе l_H потенциала в (4) можно положить $V(\mathbf{z}_1) = V(\mathbf{z}_2) = \ldots = V(\mathbf{z}_l)$ (характерный масштаб интегрирования есть радиус действия потенциала $a \gg l_H$). Для такого класса потенциалов простые вычисления приводят к следующему виду для СС:

$$Z = \frac{1}{N!}\sum_P \operatorname{sign}(P)\int\prod_{i=1}^{N}\frac{d^2z_i}{2\pi}\exp\left[\frac{1}{2}\mathbf{z}(P\mathbf{z})^* - \frac{|\mathbf{z}|^2}{2} - \beta V(\mathbf{z})\right].\qquad(9)$$

Стоящее под знаком интегрирования выражение зависит только от класса перестановок симметрической группы. Как известно [6], класс перестановок определяется набором циклов перестановок $\{\alpha\}$, таких что

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + N\alpha_N = N,\quad \operatorname{sign}(P) = (-1)^{\alpha_2+\alpha_4+\cdots},\qquad(10)$$

где α_n – число циклов длиной n в $\{\alpha\}$. Число перестановок в классе $\{\alpha\}$ есть:

$$N!\,(\alpha_1!\ 2^{\alpha_2}\alpha_2!\ \ldots\ N^{\alpha_N}\alpha_N!)^{-1}.\qquad(11)$$

С учетом (10) и (11) выражение (9) принимает вид:

$$Z = \sum_{\{\alpha\}}\frac{(-1)^{\alpha_2+\alpha_4+\ldots}}{\alpha_1!\ 2^{\alpha_2}\alpha_2!\ \ldots}\int\prod_{i=1}^{N}\frac{d^2z_i}{2\pi}\exp\left[\frac{1}{2}\mathbf{z}(P_{\{\alpha\}}\mathbf{z})^* - \frac{|\mathbf{z}|^2}{2} - \beta V(\mathbf{z})\right].\qquad(12)$$

Циклу $(1\ldots m)$ под знаком экспоненты в (12) соответствует выражение

$$-\frac{1}{4}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)^2 - \frac{1}{4}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3)^2 - \ldots - \frac{1}{4}(\mathbf{r}_m-\mathbf{r}_1)^2 - \frac{i}{2}[\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2 + \ldots + \mathbf{r}_m\times\mathbf{r}_1]\,\mathbf{n}.\qquad(13)$$

Мнимая часть в (13) описывает эффект соизмеримости (см. [4]). Для свободных частиц с помощью перехода к большому каноническому ансамблю [7] легко получить все термодинамические величины.

В заключение укажем на способ перехода к результатам работы [5]. В случае очень низких температур будем считать, что интегрирование в (12) определяется множителем $e^{-\beta V}$ и предположим, что

$$e^{-\beta V} \simeq e^{-\beta E_0} \rho(z_1, \dots, z_N) \tag{14}$$

где E_0 – энергия классического вигнеровского кристалла, а функция ρ соответствует расположению частиц в узлах решетки (δ – образная функция). В результате интегрирования точки $\mathbf{r}_i$ в (13) расположены в узлах решетки. При $\nu \to 1$ (ν – степень заполнения уровня Ландау) для выполнения приближения (14) требуются все бóльшие β, а при $\nu = 1$ оно вообще несправедливо, так как в этом случае система является жидкостью (см. также [8]). При суммировании по ближайшим узлам каждому циклу длины m соответствует множитель

$$\exp[-\alpha m + i\pi + i\pi(\nu^{-1} - 1)N_A], \tag{15}$$

где первый член в скобках описывает перекрытие волновых функций, а остальные соответствуют мнимой части в (13) с учетом знака перестановки. В (15) $N_A = \pm(\nu S/\pi l_H^2)$, где S – площадь, охватываемая перестановочным циклом (учтен знак ее обхода). Для гексагональной решетки $\alpha = (\pi/\nu\sqrt{3})$.

Благодарю Д.Е.Хмельницкого за очень ценное обсуждение работы.

Литература

1. *Tsui D.C., Störmer H.L., Gossard A.C.* Phys. Rev. Lett., 1982, **48**, 1959.
2. *Laughlin R.B.* Phys. Rev., 1983, **B27**, 3383.
3. *Tosatti E., Parinello M.* Lett. Nuov. Cim., 1983, **36**, 289.
4. *Girvin S.M., Jach T.* Phys. Rev., 1984, **B29**, 5617.
5. *Kivelson S., Kallin C., Arovas D., Schrieffer J.R.* (preprint, 1985).
6. *Мурнаган Ф.* Теория представлений групп. М.: ИИЛ, 1950.
7. *Фейнман Р.* Статистическая механика. М.: Изд. "Мир", 1975.
8. *Fukuyama H., Platzman P.M., Anderson P.W.* Phys. Rev., 1979, **B19**, 5211.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
6 февраля 1986 г.