

## К двухпараметрической теории сверхпроводимости

Р. О. Зайцев

Российский научный центр “Курчатовский Институт”, 123182, Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 декабря 2003 г.

На основе представления о наличии спиновых флуктуаций в модели Хаббарда получена замкнутая система уравнений для сверхпроводящего параметра порядка  $\Delta$  и спиновой восприимчивости. Рассмотрены предельные случаи низких температур и температуры, близкой к температуре сверхпроводящего перехода. Получена температурная зависимость параметра  $\Delta$  и величины найтовского сдвига. Установлены условия, при которых фазовый переход II-го рода сменяется фазовым переходом I-го рода.

PACS: 71.10.Fd, 71.27.+a

При изучении возможности возникновения сверхпроводимости в модели Хаббарда было обнаружено [1], что влияние спиновых флуктуаций сводится в появлении конечной скорости релаксации ( $1/\tau_s$ ) с переворотом спина, пропорциональной среднеквадратичной флуктуации спинов  $K_s$ :  $1/\tau_s \sim K_s$ . В свою очередь, величина  $K_s$  пропорциональна произведению температуры на спиновую восприимчивость  $K_s \sim T\chi_s$ . В металлической несверхпроводящей фазе восприимчивость практически не зависит от температуры, так что обратное время релаксации оказывается пропорциональным первой степени температуры.

Для модели Хаббарда:

$$\frac{1}{\tau_{sn}} = 12\pi\nu_n\mu^2T\chi_n, \quad (1)$$

где  $\nu_n$  – плотность состояний на поверхности Ферми,  $\mu$  – энергия Ферми.

Для модели Эмери-Хирша:

$$\frac{1}{\tau_{sn}} = 3\pi\nu_n \frac{(\epsilon_p\epsilon_d)^2}{2\mu^2} T(\chi_p + \chi_d), \quad (2)$$

где  $\epsilon_{p,d}$  – энергия одночастичных  $p$ - и  $d$ -состояний,  $\chi_{p,d}$  – восприимчивости  $p$ - и  $d$ -подсистем.

В сверхпроводящем состоянии появляется существенная зависимость спиновой восприимчивости, связанной с уменьшением числа нормальных электронов. Спиновая восприимчивость, отнесенная к восприимчивости нормальной фазы ( $\chi_s/\chi_n$ ), выражается через обратное время релаксации с переворотом спина с помощью известного соотношения [2, 3]

$$\frac{\chi_s}{\chi_n} = 1 - \left(\frac{\Delta}{2\pi T}\right)^2 \sum_{k>0}^{\infty} \left\{ \left[ \left(\frac{\Delta}{2\pi T}\right)^2 + u_k^2 \right]^{3/2} - \left[ \left(\frac{\Delta}{2\pi T}\right)^2 + 2u_k^2 \right] \frac{\zeta(T)}{3} \right\}^{-1}. \quad (3)$$

Входящая в это уравнение величина  $u_k$  зависит от полуцелого параметра  $k + 1/2$  с помощью следующего уравнения:

$$w_k = k + \frac{1}{2} = u_k \left\{ 1 - \frac{\zeta(T)}{\sqrt{u_k^2 + (\Delta/2\pi T)^2}} \right\}, \quad (4)$$

$$\zeta(T) = \frac{1}{2\pi T\tau_s}.$$

Уравнение для сверхпроводящего параметра порядка  $\Delta$  представляется в виде следующей суммы:

$$\ln \frac{T}{T_{c0}} = \sum_{k>0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{u_k^2 + (\Delta/2\pi T)^2}} - \frac{1}{k + 1/2} \right\}, \quad (5)$$

где  $T_{c0}$  – температура перехода, вычисленная в пределе  $\tau_s \rightarrow \infty$ .

Система уравнений (3)–(5) приобретает замкнутый вид, если записать соотношение между временем релаксации и величиной спиновой восприимчивости:

$$\zeta(T) = \frac{1}{2\pi T\tau_s} = \frac{1}{2\pi T\tau_{sn}} \frac{\tau_{sn}}{\tau_s} = \frac{1}{2\pi T\tau_{sn}} \frac{\chi_s}{\chi_n} = \zeta_n \frac{\chi_s}{\chi_n}. \quad (6)$$

Как было отмечено, величина  $1/\tau_{sn}$  пропорциональна первой степени температуры, так что параметр  $\zeta_n$  есть постоянная величина, зависящая только от свойств нормального металла, но не зависящая от температуры. Ниже предполагается, что ее значения не превышают единицу.

Уравнения (3)–(6) представляют собой замкнутую систему уравнений для нахождения сверхпроводящего параметра порядка  $\Delta$ , а также параметра расщепления

$$\varphi_s = 1/\Delta\tau_s = 2\pi T\zeta(T)/\Delta.$$

Для выяснения общей картины заметим, что основное уравнение (4) имеет вид уравнения 4-й степе-

ни по отношению к переменной  $u_k$ , так что мы имеем возможность получить явную зависимость  $u_k$  от дискретной переменной  $w_k = k + 1/2$ :

$$u_k^4 - 2w_k u_k^3 + (x^2 + w_k^2 - \zeta^2) u_k^2 - 2x^2 w_k u_k + x^2 w_k^2 = 0. \quad (7)$$

Согласно общей теории алгебраических уравнений, решение уравнения (7) выражается через один из действительных корней кубического уравнения:

$$z^3 - (w_k^2 + x^2 - \zeta^2)z^2 - 4x^2 \zeta^2 w_k^2 = 0, \quad (8)$$

$$x = \Delta/2\pi T, \quad \zeta \equiv \zeta(T).$$

В нашем случае при условии  $\zeta < \zeta_n < 1$  имеем единственный действительный корень

$$z = \frac{s^{1/3}}{6} + \frac{2a^2}{3s^{1/3}} + \frac{a}{3}, \quad x = \frac{\Delta}{2\pi T}. \quad (9)$$

$$a = w_k^2 - \zeta^2 + x^2, \quad b = 4x^2 w_k^2 \zeta^2,$$

$$s = 4(2a^3 + 27b) + 12\sqrt{3b(4a^3 + 27b)}.$$

При этом искомая функция  $u_k$  определяется через  $z$  с помощью решения одного из двух квадратных уравнений (подробнее см., например, [4]).

В результате получим

$$u_k = \frac{w_k}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{z - x^2 + \zeta^2} + \frac{1}{2} \times$$

$$\times \sqrt{w_k^2 + 2w_k \sqrt{z - x^2 + \zeta^2} - z - x^2 + \zeta^2 - 2w_k \frac{(z - 2x^2)}{\sqrt{z - x^2 + \zeta^2}}}. \quad (10)$$

Для каждого заданного значения  $\zeta_n$  условие самосогласования (6) приобретает вид зависимости  $\zeta = f(x)$ . В новых переменных имеем следующее уравнение:

$$\frac{\zeta(T)}{\zeta_n} = \frac{\chi_s}{\chi_n}, \quad \text{или}$$

$$\frac{\zeta}{\zeta_n} = 1 - x^2 \sum_{k>0}^{\infty} \left\{ [x^2 + u_k^2]^{3/2} - [x^2 + 2u_k^2] \frac{\zeta}{3} \right\}^{-1}. \quad (11)$$

Численное решение этого уравнения для четырех различных значений  $\zeta_n$  представлено на рис. 1.

Таким образом, при всех  $\zeta_n < 1$  величина  $\Delta/2\pi T$  взаимно однозначно связана с параметром  $\zeta(T)$ . Однако зависимость этих параметров от температуры не всегда оказывается однозначной.

В области низких температур  $T \ll \Delta$  восприимчивость пропорциональна плотности нормальных

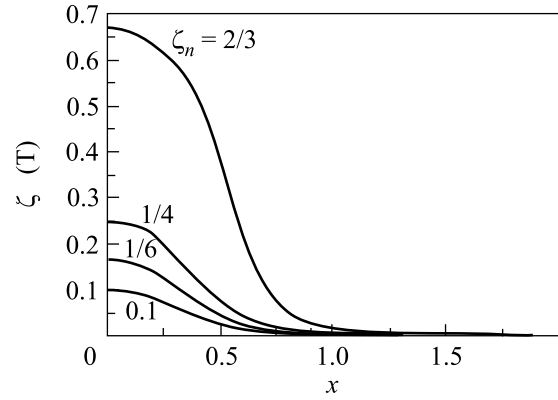


Рис.1. Зависимость параметра расспаривания  $\zeta(T)$  от  $\Delta/2\pi T$

электронов и определяется из соотношений (3) и (4) в пределе  $\zeta(T) = 0$  и  $u_k = k + 1/2 = w_k$ :

$$\zeta(T) \approx \zeta_n \frac{\chi_s}{\chi_n} = \zeta_n \sqrt{\frac{2\pi\Delta_0}{T}} \exp\left(-\frac{\Delta_0}{T}\right). \quad (12)$$

Записанная в таком виде она совпадает с известной формулой Иосида [5].

В этом пределе в уравнении (5) для  $\Delta$  можно произвести суммирование:

$$\ln \frac{\Delta\gamma}{\pi T c_0} = \ln \frac{\Delta}{\Delta_0} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k K_0\left(\frac{k\Delta}{T}\right). \quad (13)$$

Здесь введено естественное обозначение  $\Delta_0 = \Delta(0) = \pi T c_0 / \gamma$ , где  $\gamma = \exp(C)$ ,  $C \approx 0.577$  – постоянная Эйлера.

Следующее приближение находим с помощью разложения по параметру  $\zeta(T)$ :

$$u_k \approx w_k + \zeta(T) \frac{w_k}{\sqrt{w_k^2 + (\Delta/2\pi T)^2}}. \quad (14)$$

В результате оказывается, что низкотемпературная поправка к величине  $\Delta_0$ , наряду с обычным, квази-частичным слагаемым, содержит также вклад от парамагнитных флуктуаций:

$$\ln \frac{\Delta}{\Delta_0} \approx -\sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta_0}} \exp\left(-\frac{\Delta_0}{T}\right) - \frac{\pi}{4} \zeta_n \frac{\chi_s}{\chi_n} \frac{2\pi T}{\Delta_{00}}. \quad (15)$$

Используя разложение (14), находим:

$$\Delta \approx \Delta_0 \left\{ 1 - \left[ 1 + \zeta_n \frac{\pi}{4} \right] \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta_0}} \exp\left(-\frac{\Delta_0}{T}\right) \right\}. \quad (16)$$

Поправка к магнитной восприимчивости за счет парамагнитных флуктуаций оказывается малой по сравнению с поправкой (12).

$$\frac{\chi_s}{\chi_n} \approx \sqrt{\frac{2\pi\Delta_0}{T}} \exp\left(-\frac{\Delta_0}{T}\right) + \frac{\pi}{12}\zeta_n \sqrt{\frac{2\pi T}{\Delta_0}} \exp\left(-\frac{\Delta_0}{T}\right). \quad (17)$$

Далее рассмотрим уравнения, линеаризованные по  $\Delta$ .

Уравнение для температуры перехода находим из (5) и (6) при условии  $\chi_s = \chi_n$ ,  $\Delta = 0$ :

$$\ln \frac{T_c}{T_{c0}} = \sum_{k>0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k+1/2+\zeta_n} - \frac{1}{(k+1/2)} \right\}. \quad (18)$$

После проведения суммирования находим:

$$\frac{T_c}{T_{c0}} = \exp(\psi(1/2) - \psi(\zeta_n + 1/2)). \quad (19)$$

В пределе  $T = 0$ , когда  $\chi_s = 0$ , имеем  $u_k = k + 1/2$ . Затем из уравнения (5) находим классическое соотношение:

$$\frac{2\Delta_0(0)}{T_{c0}} = \frac{2\pi}{\gamma} \approx 3.527. \quad (20)$$

Сравнение (13) и (19) позволяет найти отношение  $2\Delta(0)/T_c$ :

$$\frac{2\Delta(0)}{T_c} = 8\pi \exp\left[\psi\left(\frac{1}{2} + \zeta_n\right)\right], \quad (21)$$

которое, таким образом, оказывается больше своего классического значения  $2\pi/\gamma \approx 3.53\dots$ . Соответствующая кривая представлена на рис.2.

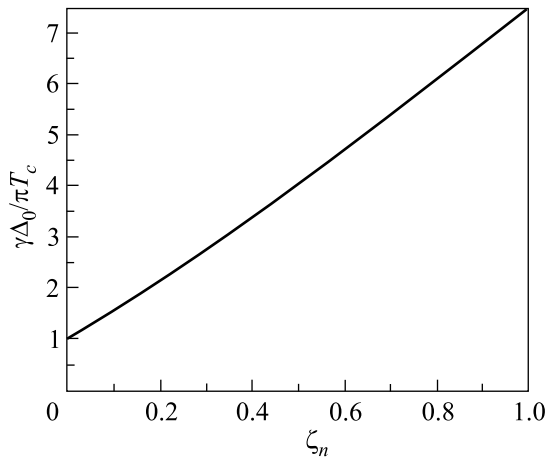


Рис.2. Зависимость  $2\Delta_0/T_c$  от параметра распаривания  $\zeta_n$

В сверхпроводящей области  $T \leq T_c$  уменьшение спиновой восприимчивости  $\chi_s$  выражается через температурный наклон параметра  $\Delta(T)$ .

Производя разложение уравнений самосогласования по малой величине  $(\Delta/2\pi T)^2$ , находим :

$$\begin{aligned} -\ln\left(\frac{T}{T_{c0}}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \zeta(T)\right) + \psi\left(\frac{1}{2}\right) = \\ = B_1(\zeta_n) \left(\frac{\Delta}{2\pi T}\right)^2, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$B_1(\zeta_n) = -\frac{1}{4}\psi^{(2)}\left(\zeta_n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\zeta_n}{12}\psi^{(3)}\left(\zeta_n + \frac{1}{2}\right).$$

Здесь  $\psi^{(k)}(x)$  – k-производные от  $\psi(x)$ , а полученное уравнение совпадает с известными соотношениями для сверхпроводников с парамагнитными примесями [6].

Для того чтобы получить температурный наклон, по которому обращается в нуль величина  $\Delta$ , достаточно разложить левую сторону уравнения (22) по степеням  $(T_c - T)/T_c$  и  $\zeta(T) - \zeta_n$ . В результате получим:

$$\frac{T_c - T}{T_c} - \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \zeta_n\right) (\zeta(T) - \zeta_n) = B_1(\zeta_n) \left(\frac{\Delta}{2\pi T}\right)^2. \quad (23)$$

Здесь температура сверхпроводящего перехода и поправка к параметру распаривания определяются из условий

$$\begin{aligned} -\ln\left(\frac{T_c}{T_{c0}}\right) = \psi\left(\frac{1}{2} + \zeta_n\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right); \\ \frac{\zeta(T) - \zeta_n}{\zeta_n} = \frac{\chi_s - \chi_n}{\chi_n}. \end{aligned} \quad (24)$$

Первую не исчезающую поправку к восприимчивости находим с помощью разложения уравнения (3) и (4) по степеням  $\Delta/2\pi T$ :

$$\begin{aligned} \frac{\chi_s}{\chi_n} = 1 - \left(\frac{\Delta}{2\pi T}\right)^2 \frac{3}{2\zeta_n^2} \times \\ \times \left\{ \frac{3}{2} \left[ \psi\left(\zeta_n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\zeta_n}{3} + \frac{1}{2}\right) \right] - \zeta_n \psi^{(1)}\left(\zeta_n + \frac{1}{2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

В результате получим величину температурного наклона:

$$\left(\frac{\Delta}{2\pi T_c}\right)^2 = \frac{T_c - T}{T_c} \frac{1}{(B_1(\zeta_n) - B_2(\zeta_n))}, \quad (26)$$

где

$$B_1(\zeta_n) = -\frac{1}{4}\psi^{(2)}\left(\zeta_n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\zeta_n}{12}\psi^{(3)}\left(\zeta_n + \frac{1}{2}\right),$$

$$B_2(\zeta_n) = \frac{3}{2\zeta_n}\psi^{(1)}\left(\zeta_n + \frac{1}{2}\right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{3}{2} \left[ \psi\left(\zeta_n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\zeta_n}{3} + \frac{1}{2}\right) \right] - \right.$$

$$\left. - \zeta_n \psi^{(1)}\left(\zeta_n + \frac{1}{2}\right) \right\}. \quad (27)$$

Мы обнаруживаем, что с понижением температуры ниже  $T \leq T_c$  уменьшение спиновой восприимчивости  $\chi_s$  приводит к возрастанию (по абсолютной величине) температурного наклона параметра  $\Delta(T)$ , что связано с появлением дополнительного коэффициента  $B_2(\zeta_n)$ . Существует критическое значение параметра  $\zeta_c \approx 0.105$ , при котором происходит обращение в нуль коэффициента перед  $\Delta^2$ .

В области низких температур, где интенсивность спиновых флуктуаций экспоненциально мала, физические свойства сверхпроводника качественно не отличаются от идеального. Энергетическая щель в спектре возбуждений совпадает со значением  $\Delta$ , плотность состояний имеет корневую особенность, энергия основного состояния выражается через  $\Delta$  с помощью той же формулы, что и в теории БКШ. Формулы для найтовского сдвига и теплоемкости в этой области имеют тот же экспоненциальный вид, но с другими предэкспоненциальными множителями.

С повышением температуры скорость релаксации с перевертанием спина возрастает в той же мере, в которой возрастает спиновая восприимчивость. Вблизи от точки перехода температурный наклон спиновой восприимчивости определяется разложением (25). Температурный наклон параметра  $\Delta$  определяется с помощью (26). Кривые восприимчивости изображены на рис.3, откуда можно видеть, что разложение по степеням близости к точке перехода оказывается возможным только в области самых малых значений параметра  $\zeta_n \ll 1$ . В области  $\zeta_n \ll 1$  наши уравнения эквивалентны теории сверхпроводников с малой концентрацией парамагнитных примесей [6]. Однако уже при  $\zeta_n \approx 1/10$  уменьшение спиновых флуктуаций, связанное с возрастанием числа сверхпроводящих электронов, становится настолько быстрым, что сверхпроводящий параметр порядка, а также плотность сверхпроводящих электронов  $n_s/n_e = 1 - \chi_s/\chi_n$  оказываются возрастающими функциями температуры (см. рис.4 и 5).

Отсюда можно заключить, что, начиная с критического значения  $\zeta_c$ , в нашей системе появляется

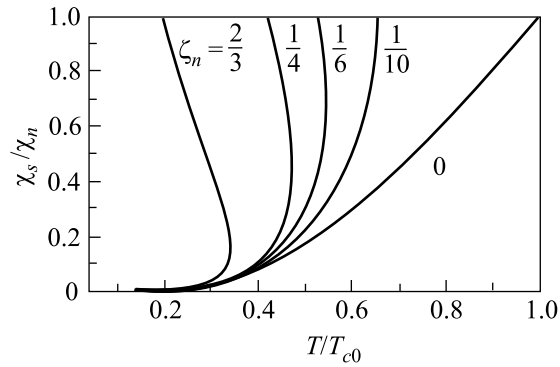


Рис.3. Температурная зависимость спиновой восприимчивости  $\chi_s(T)/\chi_n$  при различных значениях параметра  $\zeta_n$

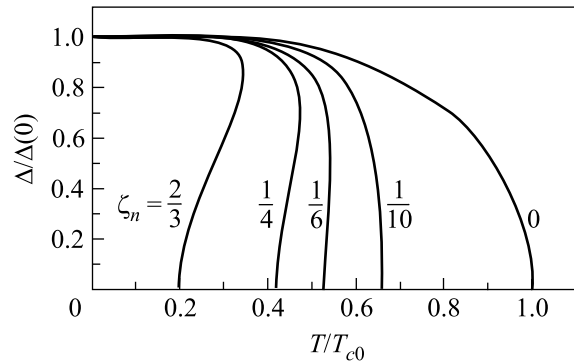


Рис.4. Температурная зависимость сверхпроводящего параметра  $\Delta(T)/\Delta_0$  при различных значениях параметра  $\zeta_n$

неустойчивость, приводящая к фазовому переходу I-го рода. Если  $\zeta_n > \zeta_c$ , тогда температуру перехода, определяемую из (19), следует считать температурой переохлаждения. В области промежуточных температур между температурой переохлаждения и

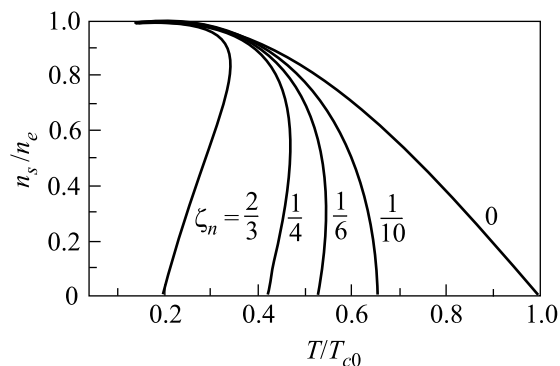


Рис.5. Температурная зависимость плотности сверхпроводящих электронов  $n_s(T)/n_e$  при различных значениях параметра  $\zeta_n$

температурой перегрева сверхпроводимость существует в смешанной фазе, физические свойства которой заслуживают специального рассмотрения.

Таким образом, учет влияния спиновых флуктуаций приводит к существенному уменьшению эффективной константы БКШ, которая определяет критическую температуру по сравнению с той константой, которая определяет величину энергетической щели в пределе  $T \rightarrow 0$ . В результате удается объяснить экспериментально наблюдаемое, завышенное по сравнению с теорией БКШ, значение параметра  $2\Delta(0)/T_c$ . В то же время, учет обратного влияния эффекта куперовского спаривания на спиновые флуктуации при-

водит к их подавлению. При определенных условиях этот эффект обуславливает быстрое температурное возрастание параметра  $\Delta$  и появление фазового перехода I-го рода с малым выделением тепла.

- 
1. Р. О. Зайцев, Письма в ЖЭТФ **56**, 355 (1992).
  2. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **42**, 1088 (1962).
  3. Л. П. Горьков, А. И. Русинов, ЖЭТФ **46**, 1363. (1964)
  4. М. Абрамович, И. А. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, М.: Изд-во Наука, 1979, стр. 27.
  5. К. Yosida, Phys. Rev. **110**, 769 (1958).
  6. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ **39**, 1781 (1960).