

От свободных полей к AdS : случай частиц со спином

М. Конюшихин¹⁾

Институт теоретической и экспериментальной физики, 117259 Москва, Россия

Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 25 мая 2007 г.

Однопетлевые диаграммы с тремя внешними линиями в обычной конформной теории поля в D измерениях равны конечной сумме древесных диаграмм с одной вершиной в теории с метрикой AdS_{D+1} . Вычисляются некоторые члены дуального лагранжиана, отвечающие за взаимодействие. Рассмотрены частицы без спина, частицы со спином $1/2$ и частицы со спином 1.

PACS: 11.10.Kk, 11.15.Pg, 11.25.Tq

1. Широко известно, что калибровочные теории с калибровочной группой $SU(N)$ при больших N могут иметь дуальное описание в терминах замкнутой теории струн с натяжением струны $\sim g_{YM}\sqrt{N}$. В частности, теория $\mathcal{N} = 4$ SYM дуальна теории струны типа IIB в метрике $AdS_5 \times S_5$. Такое соответствие следует из дуальности между открытыми и замкнутыми струнами [1–3].

Дуальность калибровочных теорий и струн можно изучать с разных сторон. В работах [4, 5] было показано, что однопетлевая диаграмма с тремя внешними линиями в теории безмассового скалярного поля с взаимодействием типа Φ^3 в D измерениях равна древесной диаграмме с одной вершиной, но в другой скалярной теории поля с взаимодействием Φ^3 – теории в $D+1$ измерении в метрике AdS_{D+1} . Такое равенство получается, если петлю переписать через швингеровские параметры, а затем сделать замену координат. Аналогичное соответствие известно и для случая одной петли с двумя внешними линиями. Кроме того, диаграммы, подобные той, что изображена на рис.1а, также равны древесным в дуальной теории.

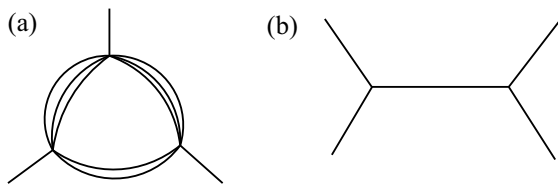


Рис.1

Неизвестно аналогичного утверждения про диаграммы с большим числом внешних линий. Например, уже в случае однопетлевой диаграммы с четырьмя внешними линиями в дуальном описании бу-

дет сумма древесных диаграмм с двумя вершинами (рис.1б). Сумма ведется по типам промежуточных частиц (по их спинам и массам), бегущих между вершинами. Различных типов частиц, дающих вклад в ответ, может быть бесконечно много, сумма будет бесконечной, и поэтому трудно написать явное математическое выражение со стороны AdS .

В данной работе показано, что любая однопетлевая диаграмма с тремя внешними линиями (в теории с полиномиальным по полям взаимодействием) всегда равна древесной диаграмме или конечной сумме древесных диаграмм в дуальной теории. Найден явный вид такой суммы для двух однопетлевых диаграмм с тремя внешними линиями; скалярные или векторные частицы стоят на внешних линиях, скалярная частица или частица со спином $1/2$ бегает в петле (рис.2). В качестве ответа выписаны соответ-

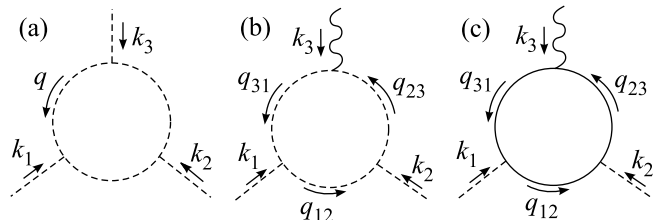


Рис.2. Однопетлевые диаграммы

ствующие члены дуального лагранжиана, отвечающие за взаимодействие. В ответе содержатся скалярные и векторные поля, взаимодействующие как $\Phi^* A^\mu i\partial_\mu \Phi$.

2. В данном разделе повторяется результат из [4] и вводятся обозначения, удобные для дальнейшего. Диаграмма на рис.2а равна древесной в AdS_{D+1} .

Рассмотрим скалярную безмассовую теорию поля в D измерениях с взаимодействием $L_{int} = \lambda\Phi^3$. Пе-

¹⁾e-mail: konush@itep.ru

репишем диаграмму на рис.2а через швингеровские параметры по формуле

$$\frac{1}{p^2} = \int_0^\infty dT e^{-Tp^2}. \quad (1)$$

Соответствующее выражение будет иметь вид

$$I \sim \int dq \frac{1}{q^2} \frac{1}{(q+k_1)^2} \frac{1}{(q-k_3)^2} = \int dT_1 dT_2 dT_3 dq e^{-T_2 q^2 - T_3 (q+k_1)^2 - T_1 (q-k_3)^2}. \quad (2)$$

Используя $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ и вводя обозначение $Q = q + \alpha_3 k_1 - \alpha_1 k_3$, перепишем показатель экспоненты в форме $-S - \sum_i T_i Q^2$, где

$$\alpha_i = T_i / \sum T, \quad (3)$$

$$S = k_1^2 \frac{T_2 T_3}{\sum T_i} + k_2^2 \frac{T_3 T_1}{\sum T_i} + k_3^2 \frac{T_1 T_2}{\sum T_i}. \quad (4)$$

Параметры α_i удовлетворяют условию $\sum \alpha_i = 1$. Стоит заметить, что дуальное описание для диаграммы на рис.2а возможно в силу особой формы функции S : в ней импульсы на внешних линиях не смешиваются друг с другом. В случае однопетлевой диаграммы с четырьмя внешними линиями это не так.

Проинтегрируем по Q и сделаем замену переменных:

$$\frac{1}{\rho_i} = \frac{T_i T_2 T_3}{T_i \sum T_j}. \quad (5)$$

Область интегрирования для ρ такая же, что и для T : $\rho_i \in (0, \infty)$. Имеем:

$$I \sim \int d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 \frac{(\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{D/2-3}}{(\sum \rho_i)^{D-3}} e^{-\sum k_i^2 / \rho_i}. \quad (6)$$

Далее удобно перейти в координатное представление, вводя дополнительные интегрирования:

$$\int dk_1 dk_2 dk_3 dx e^{ik_1(x_1-x)} e^{ik_2(x_2-x)} e^{ik_3(x_3-x)} I. \quad (7)$$

После взятия интегралов по k получим:

$$\int d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 dx \left(\frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3}{\sum \rho_i} \right)^{D-3} \exp \left\{ - \sum_i \frac{\rho_i (x_i - x)^2}{4} \right\}. \quad (8)$$

Осталось поднять $\sum \rho_i$ в экспоненту по формуле

$$\frac{1}{A^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dt t^{n-1} e^{-tA} \quad (9)$$

и переписать ответ в виде

$$\int \frac{dt dx}{t^{D/2+1}} K_{D-2}^{(1)} K_{D-2}^{(2)} K_{D-2}^{(3)}. \quad (10)$$

Здесь $K_\delta^{(i)} = K_\delta(t, x_i - x)$, и функция

$$K_\delta(t, x) = \frac{t^{\delta/2}}{(t + x^2/4)^\delta} \sim t^{\delta/2} \int_0^\infty d\rho \rho^{\delta-1} e^{-\rho(t+x^2/4)} \quad (11)$$

является пропагатором частицы из объемлющего пространства на границу в метрике AdS_{D+1} . В координатах $z = \sqrt{t}$, $\mathbf{y} = \mathbf{x}/2$ при $z > 0$ эта функция удовлетворяет уравнению

$$[z^{D+1} \partial_z z^{1-D} \partial_z + z^2 \partial_\mu^2 + \delta(D - \delta)] K_\delta(z, \mathbf{y}) = 0, \quad (12)$$

$$[\Delta + m^2] K_\delta(z, \mathbf{y}) = 0, \quad (13)$$

где $m^2 = \delta(D - \delta)$ – масса частицы, а $\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a \sqrt{g} g^{ab} \partial_b$ – оператор Лапласа в метрике AdS :

$$ds^2 = \frac{dz^2 - d\mathbf{y}^2}{z^2}. \quad (14)$$

Таким образом, однопетлевая диаграмма на рис.2а равна древесной диаграмме в AdS . В выражении (10) $1/t^{D/2+1} = \sqrt{g}$, а потому древесной диаграмме соответствует вершина, построенная по взаимодействию $\sim \int \Phi^3 \sqrt{g} dt dx$ для скалярного поля в AdS .

Итак, в дуальном описании частицы распространяются с границы пространства AdS_{D+1} в объемлющее пространство.

3. В случае частиц со спином вычисление становится заметно сложнее. Необходимо разбираться, чему равны пропагаторы векторных частиц в AdS . Несложно заметить, что дуальное описание всегда будет давать сумму конечного числа древесных диаграмм.

Посмотрим, какие типы вершин будут получаться в общем случае. Сформулируем форму ответа в общем случае однопетлевой диаграммы с тремя внешними линиями. Вид выражения (4) зависит только от $1/p^2$ частей пропагаторов и не зависит от вершин и точной формы пропагаторов. В общем случае выражение, соответствующее какой-нибудь диаграмме, можно записать в виде

$$\int dq F^{\mu_1 \dots \mu_n}(q, k_1, k_2, k_3) \frac{1}{q^2} \frac{1}{(q+k_1)^2} \frac{1}{(q-k_3)^2}, \quad (15)$$

где $F^{\mu_1 \dots \mu_n}(q, k_1, k_2, k_3)$ – полином по q и k . Эта функция различна для разных диаграмм. После введения

швингеровских параметров и интегрирования по q получается полином от k и от $\alpha_i = T_i / \sum T$. Теперь, если в формулу (7) подставить такой полином от k , то можно заменить k_i на $-i(\partial/\partial x_i)$. Поэтому в общем случае ответ выглядит так:

$$\sum_{\{\delta\}, \{i\}} C_{\delta_1 \delta_2 \delta_3}^{i_1 i_2 \dots i_n}(t) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}^{\mu_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}^{\mu_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_n}^{\mu_n}} K_{\delta_1}^{(1)} K_{\delta_2}^{(2)} K_{\delta_3}^{(3)}. \quad (16)$$

Важно, что эта сумма конечна. Ясно, что дуальное выражение – это сумма древесных диаграмм с одной вершиной, выражение для которой определяется по взаимодействию в AdS:

$$S_{\text{int}} = \int \sqrt{g} dt dx \times \sum \Omega^{\{\mu, \nu, \rho, \lambda, \sigma, \delta\}}(t) \{\partial_\mu\} \Phi^{\{\nu\}} \{\partial_\rho\} \Phi^{\{\lambda\}} \{\partial_\sigma\} \Phi^{\{\delta\}}. \quad (17)$$

Здесь $\{\partial_\mu\} = \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n}$ и $\Phi^{\{\nu\}} = \Phi^{\nu_1 \dots \nu_l}(t, x)$ – тензорное поле. Индексы μ_i в (16) D -мерны, тогда как индексы в (17) $D + 1$ -мерны. Взаимодействие (17) воспроизводит (16) только тогда, когда правильно выбраны пропагаторы для тензорных полей.

4. Проиллюстрируем описанные выше утверждения на конкретных примерах. Рассмотрим диаграмму, изображенную на рис.2б. Это простейший пример диаграммы с векторной частицей на внешней линии. Будет показано, что дуальное описание содержит конечную сумму древесных диаграмм.

Функция F^μ , введенная в (15), для данного случая имеет простой вид

$$F^\mu = q_{31}^\mu + q_{23}^\mu. \quad (18)$$

Заметим, что $q_{ij}^\mu = Q^\mu + \alpha_j k_i^\mu - \alpha_i k_j^\mu$ и что $\alpha_i = \rho_i / \sum \rho$. Тогда

$$F^\mu = 2Q^\mu + k_1^\mu (\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3) - k_2^\mu (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3). \quad (19)$$

Рассмотрим вычисление выражения

$$\int dx d^3 \rho dk_1 dk_2 dk_3 dQ \frac{(\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{D/2-3}}{(\sum \rho)^{D-3}} \times e^{-Q^2 - \sum k_i^2 / \rho_i} e^{i \sum k_i (x_i - x)} F^\mu \quad (20)$$

более подробно. В последующих формулах подразумевается, что $k_i = -i(\partial/\partial x_i)$. Проинтегрируем по Q и по k :

$$\int dx d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 \left(\frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3}{\sum \rho} \right)^{D-3} [k_1^\mu (\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3) - k_2^\mu (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)] e^{-\sum \rho_i (x_i - x)^2 / 4} \quad (21)$$

и используем соотношение

$$\int d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 \frac{\rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \rho_3^{n_3}}{(\sum \rho_i)^\Delta} e^{-\sum \frac{\rho_i x_i^2}{4}} = \frac{\Gamma(n_1+1)\Gamma(n_2+1)\Gamma(n_3+1)}{\Gamma(\Delta)} \int dt t^{\Delta - \frac{n_1+n_2+n_3+5}{2}} \times K_{n_1+1}(t, x_1) K_{n_2+1}(t, x_2) K_{n_3+1}(t, x_3). \quad (22)$$

Тогда ответ для (21) с точностью до множителя равен

$$\int \frac{dx dt}{t^{D/2+1}} \sqrt{t} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1^\mu} [K_{D-2}^{(1)} K_{D-1}^{(2)} K_{D-2}^{(3)} - K_{D-1}^{(1)} K_{D-2}^{(2)} K_{D-2}^{(3)} - K_{D-2}^{(1)} K_{D-2}^{(2)} K_{D-1}^{(3)}] - \frac{\partial}{\partial x_2^\mu} [K_{D-1}^{(1)} K_{D-2}^{(2)} K_{D-2}^{(3)} - K_{D-2}^{(1)} K_{D-1}^{(2)} K_{D-2}^{(3)} - K_{D-2}^{(1)} K_{D-2}^{(2)} K_{D-1}^{(3)}] \right\}. \quad (23)$$

Выпишем соответствующие члены взаимодействия для дуального лагранжиана:

$$L_{\text{int}} \sim \Phi_1^* i \partial_M \Phi_2 A_2^M - \Phi_2^* i \partial_M \Phi_1 A_1^M - \Phi_2^* i \partial_M \Phi_2 A_1^M + \text{h.c.} \quad (24)$$

Здесь M – это $D + 1$ -мерный индекс, Φ_1 – скалярное поле с $\delta = D - 1$, Φ_2 – скалярное поле с $\delta = D - 2$, A_1^M – векторное поле с $\delta = D - 1$, A_2^M – векторное поле с $\delta = D - 2$. Масса соответствующей частицы определяется как $m^2 = \delta(D - \delta)$. Вторые квадратные скобки в (23) дают комплексно сопряженные члены в (24).

Такое взаимодействие правильно воспроизводит (23), если на пропагаторы G_{MN} для векторных частиц наложены ограничения

$$G^{D+1, \mu} = 0, \quad (25)$$

$$G^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \sqrt{t} K_\delta(t, x), \quad (26)$$

где $\eta_{\mu\nu}$ – плоская метрика.

Заметим, что (24) правильно воспроизводит лагранжиан взаимодействия скалярного поля с калибровочным. Член вида $A_\mu^2 \Phi^2$ не ухватывается нами в данном порядке теории возмущений.

5. Рассмотрим более сложный случай: диаграмму, изображенную на рис.2с. В петле бежит частица со спином $1/2$. Соответствующая функция

$$F^\mu = \frac{1}{2} \text{tr} \{ \gamma^\mu \hat{q}_{31} \hat{q}_{12} \hat{q}_{23} \}. \quad (27)$$

Чтобы переписать соответствующее выражение в терминах AdS , заменим $q \rightarrow Q$, сохраним под интегралом только четные степени Q , а слагаемое, содержащее $Q_\mu Q_\nu$ заменим на

$$\frac{1}{2 \sum T_i} \eta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum \rho_i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \eta_{\mu\nu}. \quad (28)$$

После интегрирования по Q функция F^μ будет иметь вид

$$\sum k_i^\mu [\text{нечто от } k^2 \text{ и } \alpha]. \quad (29)$$

Мы вычисляем выражение

$$\int d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 \frac{(\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{D/2-3}}{(\sum \rho_i)^{D-3}} e^{-\sum k_i^2 / \rho_i} \times \\ \times \sum k_j^\mu [\text{нечто от } k^2 \text{ и } \alpha]. \quad (30)$$

Под интегралом можно избавиться от четных степеней k при помощи интегрирования по частям:

$$\int d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 \frac{\rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \rho_3^{n_3}}{(\sum \rho_i)^M} k_1^2 e^{-\sum k_i^2 / \rho_i} = \\ = - \int d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 e^{-\sum k_i^2 / \rho_i} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left[\frac{\rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \rho_3^{n_3}}{(\sum \rho_i)^M} \rho_1^2 \right]. \quad (31)$$

Это дает:

$$k_1^2 \rightarrow \sum \rho_i [M \alpha_1^2 - (n_1 + 2) \alpha_1] \quad (32)$$

и то же самое для k_2^2 и для k_3^2 . Последнее равенство демонстрирует очевидное свойство:

$$\frac{x^2}{(t+x^2)^\Delta} = \frac{1}{(t+x^2)^{\Delta-1}} - \frac{t}{(t+x^2)^\Delta}. \quad (33)$$

Фермионная петля дает дополнительную (по отношению к диаграмме на рис.2b) расходимость, и переброс производной в интеграле законен только при условии $M > n_1 + 2$ (что дает $D < 4$).

Теперь подставим вместо k^2 выражения по формуле (32). Удивительно, что после довольно громоздких вычислений получается простой ответ для F^μ :

$$F^\mu \rightarrow (D-2) \sum \rho_i \alpha_1 \alpha_2 \{ k_1^\mu (\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3) - \\ - k_2^\mu (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) \}. \quad (34)$$

Осталось перейти в координатное представление:

$$\int \frac{dx dt}{t^{D/2+1}} \sqrt{t} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1^\mu} \left[K_{D-1}^{(1)} K_D^{(2)} K_{D-2}^{(3)} - \right. \right. \\ \left. \left. - K_D^{(1)} K_{D-1}^{(2)} K_{D-2}^{(3)} - \frac{D-1}{D} K_{D-1}^{(1)} K_{D-1}^{(2)} K_{D-1}^{(3)} \right] - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x_2^\mu} \left[K_D^{(1)} K_{D-1}^{(2)} K_{D-2}^{(3)} - \right. \right. \\ \left. \left. - K_{D-1}^{(1)} K_D^{(2)} K_{D-2}^{(3)} - \frac{D-1}{D} K_{D-1}^{(1)} K_{D-1}^{(2)} K_{D-1}^{(3)} \right] \right\}. \quad (35)$$

Соответствующий лагранжиан взаимодействия:

$$L_{\text{int}} = \Phi_1^* i \partial_M \Phi_0 A_2^M - \Phi_0^* i \partial_M \Phi_1 A_2^M - \\ - \frac{D-1}{D} \Phi_1^* i \partial_M \Phi_1 A_1^M + \text{h.c.} \quad (36)$$

Здесь используются те же самые обозначения для полей, что и в (24). При этом Φ_0 – это поле с $\delta = D$. Очень важно, что пропагаторы векторных полей для данной диаграммы получились такие же, как и в предыдущем разделе.

6. Можно также вычислить еще несколько диаграмм с одной векторной внешней линией и двумя скалярными. Ответ всегда будет устроен аналогично (36).

Еще одно вычисление в теории с неабелевыми калибровочными полями в D измерениях требует учета трех диаграмм (рис.3) (одна из них включает духи),

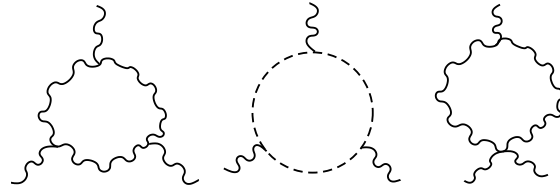


Рис.3. Однопетлевые диаграммы в теории неабелева калибровочного поля

но только две из них имеют форму подобную той, что изображена на рис.2. Неясно, как можно вычислить третью диаграмму. В этой работе не приводятся соответствующие вычисления для первых двух диаграмм из-за их громоздкости. Необходимо учитывать все три диаграммы, так как только их сумма будет калибровочно инвариантна.

Вычисления, описанные выше, могут пролить свет на то, как переписать однопетлевую диаграмму с четырьмя внешними линиями, поскольку теперь мы знаем, какие вершины имеются в дуальной теории. Есть и другая идея, как можно искать такое соответствие. Рассмотрим ситуацию, когда в петле бежит частица со спином и рассмотрим соответствующее математическое выражение в первично квантованной формулировке. Можно записать функциональный интеграл для частицы со спином, пользуясь только бозонными полями. Из-за геометричности такого функционального интеграла можно ожидать, что удастся что-то с ним сделать и переписать его в терминах теории в AdS_{D+1} .

Заметим, что формула (32) справедлива только при $D < 4$. На практике это означает, что можно рассматривать не только $D = 3$, но также и $D = 4 - 2\epsilon$ (размерная регуляризация). Формально граничный

член, возникающий в интегрировании по частям в (31), равен нулю при любом $D < 4$, то есть предел $\epsilon \rightarrow +0$ конечен. Но мы знаем, что если вычислить диаграмму на рис.2с в размерной регуляризации, то расходимость останется. Нужно добиться лучшего понимания в этом вопросе.

Я благодарен А. Маршакову за полезные обсуждения и А. Горскому за полезные обсуждения и за руководство в этой работе.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов Росатома, гранта Российского фонда фундаментальных исследований # 07-02-01161 и гранта НШ # 8004.2006.2.

-
1. J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998) [*Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1113 (1999)] [arXiv:hep-th/9711200].
 2. S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B* **428**, 105 (1998) [arXiv:hep-th/9802109].
 3. E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 253 (1998) [arXiv:hep-th/9802150].
 4. R. Gopakumar, *Phys. Rev. D* **70**, 025009 (2004) [arXiv:hep-th/0308184].
 5. R. Gopakumar, *Phys. Rev. D* **70**, 025010 (2004) [arXiv:hep-th/0402063].