О нелинейной неустойчивости решений систем гидродинамического типа

А. Д. Полянин[1)]

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва, Россия

Поступила в редакцию 9 июня 2009 г.

Описаны новые точные решения (включая периодические решения) трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса, содержащие произвольные функции. Исследованы вопросы о нелинейной устойчивости/неустойчивости полученных решений. Обнаружено, что характерной чертой широкого класса решений систем гидродинамического типа является их неустойчивость. Показано, что неустойчивость может иметь место не только при достаточно больших, но и при произвольно малых числах Рейнольдса (и может не зависеть от профиля скорости жидкости). Дана общая физическая интерпретация рассматриваемых решений. Важно отметить, что для доказательства неустойчивости решений в статье применен новый точный метод (не использующий никаких допущений и приближений), который может быть полезен для анализа других нелинейных физических моделей и явлений.

PACS: 47.20.–k

Некоторые точные решения двумерных и трехмерных уравнений Навье–Стокса приведены в [1 – 11]. Описание различных методов теории гидродинамической устойчивости и результатов их применения можно найти, например, в [1, 12, 13].

1. Уравнения движения жидкости. Структура точных решений. Трехмерные нестационарные движения вязкой несжимаемой жидкости описываются уравнениями Навье–Стокса и неразрывности:

$$\frac{\partial V_n}{\partial t} + V_1\frac{\partial V_n}{\partial x} + V_2\frac{\partial V_n}{\partial y} + V_3\frac{\partial V_n}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\nabla_n P + \nu\left(\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2}\right), \quad n = 1,\,2,\,3,$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

Здесь x, y, z – декартовы координаты, t – время, V_1, V_2, V_3 – компоненты скорости жидкости, P – давление, ρ и ν – плотность и кинематическая вязкость жидкости; $\nabla_1 P = \partial P/\partial x$, $\nabla_2 P = \partial P/\partial y$, $\nabla_3 P = \partial P/\partial z$. При записи уравнений (1) считалось, что массовые силы потенциальны и включены в давление.

Система уравнений (1) допускает широкий класс точных решений с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных следующего вида:

$$V_n = f_n(z,t)x + g_n(z,t)y, \quad n = 1,\,2; \quad V_3 = F(z,t). \tag{2}$$

Исходная идея искать точные решения уравнений Навье–Стокса в форме (2) была высказана Линем [14]. В результате подстановки выражений (2) в уравнения (1) с последующим исключением давления возникают полиномиальные выражения первой степени по координатам x и y вида $A_m x + B_m y + C_m = 0$, коэффициенты которых A_m, B_m, C_m зависят только от переменных z и t и выражаются через функции f_n, g_n, F, и их производные. Приравняв A_m, B_m, C_m нулю, получим переопределенную систему уравнений для f_n, g_n, F. Анализ этой системы в итоге дает следующее представление для компонент скорости и давления [7, 11]:

$$\begin{gathered} V_1 = x\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z} + w\right) + yv, \\ V_2 = xu - y\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z} + w\right), \quad V_3 = F, \\ \frac{P}{\rho} = p_0 - \frac{1}{2}\alpha x^2 - \frac{1}{2}\beta y^2 - \\ -\gamma xy - \frac{1}{2}F^2 + \nu\frac{\partial F}{\partial z} - \int\frac{\partial F}{\partial t}\,dz, \end{gathered} \tag{3}$$

где p_0, α, β, γ – произвольные функции времени t, задающие распределение давления, F, u, v, w – неизвестные функции, зависящие от координаты z и времени t.

Общая физическая интерпретация решений вида (2) (или (3)) будет дана в разд. 8.

[1)]e-mail: polyanin@ipmnet.ru

2. Определяющая система уравнений. Выражения для составляющих скорости и давления (3) редуцируют уравнения гидродинамики (1) к нелинейной системе, состоящей из четырех уравнений:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z} + F\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 =$$
$$= \nu\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + 2(uv + w^2) - \alpha - \beta,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + F\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial F}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 u}{z^2} + \gamma, \tag{4}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + F\frac{\partial v}{\partial z} - v\frac{\partial F}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \gamma,$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} + F\frac{\partial w}{\partial z} - w\frac{\partial F}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Основная идея последующего анализа состоит в том, чтобы из системы (4) выделить одно изолированное уравнение для продольной компоненты скорости $V_3 = F$, которое дополняется вторым уравнением для определения новой вспомогательной функции G.

3. Сведение системы (4) к двум уравнениям. В уравнениях (4) положим

$$u = \frac{1}{2}\sin\varphi\left(\frac{\partial F}{\partial z} + q\right) + a^2 G,$$
$$v = \frac{1}{2}\sin\varphi\left(\frac{\partial F}{\partial z} + q\right) - b^2 G,$$
$$w = \frac{1}{2}\cos\varphi\left(\frac{\partial F}{\partial z} + q\right) + abG,$$
$$\alpha = \frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}p(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2}q'_t\cos\varphi, \tag{5}$$
$$\beta = \frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}p(1+\cos\varphi) - \frac{1}{2}q'_t\cos\varphi,$$
$$\gamma = \frac{1}{2}p\sin\varphi + \frac{1}{2}q'_t\sin\varphi,$$

где $p = p(t)$, $q = q(t)$ – произвольные функции, a, b – произвольные постоянные, $G = G(z,t)$ – искомая функция, φ – константа, определяемая из трансцендентного уравнения

$$(a^2 - b^2)\sin\varphi + 2ab\cos\varphi = 0. \tag{6}$$

В результате система (4) сводится к двум уравнениям:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z} + F\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \nu\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + q\frac{\partial F}{\partial z} + p, \tag{7}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + F\frac{\partial G}{\partial z} - G\frac{\partial F}{\partial z} = \nu\frac{\partial G}{\partial z^2}. \tag{8}$$

Нелинейное уравнение (7) может рассматриваться независимо, а уравнение (8) линейно относительно искомой функции G и имеет тривиальное частное решение $G = 0$.

Отметим, что уравнение (7) при различных p и q встречалось в работах [4, 6, 9, 11] (в том числе и в задачах пограничного слоя [6]) , в которых можно найти его некоторые точные решения.

Общее свойство уравнения (7) [6, 11]: если $\widetilde{F}(z,t)$ – некоторое его решение, то функция

$$F = \widetilde{F}(z + \psi(t), t) - \psi'_t(t), \tag{9}$$

где $\psi(t)$ – произвольная функция, также будет решением уравнения (7). Кроме того, решением будет и функция $F = -\widetilde{F}(-z,t)$.

4. Точные решения уравнения (7). Приведем несколько новых точных решений уравнения (7), которые выражаются в элементарных функциях.

1) Дробно-рациональное решение с обобщенным разделением переменных:

$$F = -a'_t(t) + b(t)[z + a(t)] - \frac{6\nu}{z + a(t)},$$
$$q = -4b, \quad p = b'_t + 3b^2,$$

где $a = a(t)$ и $b = b(t)$ – произвольные функции.

2) Решения с обобщенным разделением переменных экспоненциального вида по z:

$$F = a(t)e^{-\sigma z} + b(t), \quad p = 0, \quad q = \frac{a'_t}{a} - \sigma b - \sigma^2\nu,$$

где $a = a(t)$ и $b = b(t)$ – произвольные функции, σ – произвольная постоянная. Выбрав в качестве $a(t)$ и $b(t)$ периодические функции, получим периодическое решение по времени.

3) Пространственно-периодические решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$F = a(t)\sin(\sigma z + B), \ a(t) = C\exp\left[-\nu\sigma^2 t + \int q(t)\,dt\right],$$
$$p = -\sigma^2 a^2(t), \quad q = q(t) \ – \text{ произвольная функция},$$

где B, C, σ – произвольные постоянные. Положив $q(t) = \nu\sigma^2 + \varphi'_t(t)$, где $\varphi(t)$ – периодическая функция, получим решение, периодическое по обоим аргументам z и t.

4) Решение с функциональным разделением переменных:

$$F = -6\nu\sigma\,\mathrm{th}[\sigma(z + a(t))] - a'_t(t), \quad p = 0, \quad q = 8\nu\sigma^2,$$

где $a = a(t)$ – произвольная функция, σ – произвольная постоянная (это решение ограничено при ограниченной производной a'_t).

5. Представление решений уравнения (8) через решения уравнения (7). Пусть $F = F(z,t)$ – решение уравнения (7). Тогда уравнение (8) имеет решение

$$G = A'_t + Aq + A\frac{\partial F}{\partial z} + B\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \tag{10}$$

где функции $A = A(t)$ и $B = B(t)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$A''_{tt} + qA'_t + (p + q'_t)A = 0, \tag{11}$$

$$B'_t + qB = 0. \tag{12}$$

Доказательство данного факта проводится путем исключения функции G из (8) и (10) с последующим сопоставлением полученного выражения как с уравнением (7), так и с уравнением, возникающим в результате дифференцирования (7) по z.

Общее решение уравнения (12) имеет вид $B = C\exp\left(-\int q\,dt\right)$, где C – произвольная постоянная.

6. Анализ устойчивости/неустойчивости решений, основанный на уравнении (8). Для анализа устойчивости/неустойчивости решений используем формулу (10) и уравнения (11), (12), которые связывают решения уравнений (7), (8). Важно отметить, что во многих случаях нет необходимости знать явный вид функции F.

Рассмотрим сначала задачи со стационарной продольной компонентой скорости, что соответствует $F = F(z)$, $p = \mathrm{const}$, $q = \mathrm{const}$. В этом случае решение уравнения (11) зависит от знака дискриминанта $\Delta = q^2 - 4p$:

$$A(t) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{qt}{2}\right)\left[C_1\exp\left(\dfrac{t\sqrt{\Delta}}{2}\right) + \right. \\ \left. + C_2\exp\left(-\dfrac{t\sqrt{\Delta}}{2}\right)\right] & \text{при} \quad \Delta > 0, \\ \exp\left(-\dfrac{qt}{2}\right)\left[C_1\sin\left(\dfrac{t\sqrt{|\Delta|}}{2}\right) + \right. \\ \left. + C_2\cos\left(\dfrac{t\sqrt{|\Delta|}}{2}\right)\right] & \text{при} \quad \Delta < 0, \\ \exp\left(-\dfrac{qt}{2}\right)(C_1 t + C_2) & \text{при} \quad \Delta = 0, \end{cases} \tag{13}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Далее, для простоты, в (10) и (12) полагаем $B = 0$. При анализе будем различать два случая.

1) *Невырожденный случай* $F_z \not\equiv 0$. При $q < 0$ (p – любое) или $p < 0$ (q – любое) решения (10) и (13) (при $C_1 \neq 0$) экспоненциально растут при $t \to \infty$. Поэтому указанные значения параметров p и q определяют область нелинейной неустойчивости системы (7), (8) для любого ограниченного стационарного профиля продольной компоненты скорости $F(z)$ (отличного от константы). Точка $p = q = 0$ также относится к области неустойчивости системы (7), (8).

Действительно, за счет выбора постоянных C_1 и C_2 в силу (10), (13) можно сделать начальную величину $|G|_{t=0}$ (которая трактуется как начальное возмущение относительно тривиального решения $G = 0$ уравнения (8)) меньше любого наперед заданного ε. Однако при $q < 0$ (p – любое) или $p < 0$ (q – любое) имеем $|G| \to \infty$ при $t \to \infty$. Это означает, что произвольно малые начальные возмущения решений системы (7), (8) с увеличением времени неограниченно возрастают.

Замечание. Если $F \to F_1$ при $z \to -\infty$ и $F \to F_2$ при $z \to +\infty$ ($F_1, F_2 = \mathrm{const}$), то решение (10) при $A = 0$, $B \neq 0$ стремится к нулю при $z \to \pm\infty$.

При $q = 0$, $p > 0$ решение (13), а следовательно, и решение (10) являются периодическими. Совместное выполнение неравенств $q \geq 0$, $p \geq 0$ ($|p| + |q| \neq 0$) определяют область условной устойчивости рассматриваемых решений.

Важно подчеркнуть, что здесь речь идет о *нелинейной неустойчивости*, причем все полученные выше результаты и решения являются точными (а не линеаризованными, как это имеет место в теории линейной устойчивости; здесь не использованы также различные допущения, разложения и аппроксимации, характерные для многих нелинейных теорий [1, 12, 13]).

Пример 1. Стационарное пространственно-периодическое решение,

$$F = a\sin(\sigma z + b), \quad G = 0 \quad (p = -a^2\sigma^2, \quad q = \nu\sigma^2)$$

системы (7), (8) является неустойчивым при любых значениях a, b, σ ($a \neq 0$, $\sigma \neq 0$).

Пример 2. Стационарное монотонное ограниченное решение,

$$F = -6\nu\sigma\,\mathrm{th}(\sigma z + b), \quad G = 0 \quad (p = 0, \quad q = 8\nu\sigma^2)$$

системы (7), (8) является устойчивым.

Все приведенные выше выводы по устойчивости и неустойчивости, а также формулы (10)–(13), остаются справедливыми для любых нестационарных решений $F = F(z,t)$, $G = G(z,t)$ (при условии ограниченности производной $F_z \not\equiv 0$) системы (7), (8) при $p = \mathrm{const}$, $q = \mathrm{const}$.

Области неустойчивости и устойчивости решений системы (7)–(8)

Область изменения параметров	Продольная компонента скорости F	Устойчивость/неустойчивость
$p < 0$, q – любое; или $q < 0$, p – любое; или $p = q = 0$	F – любое решение, кроме $F \equiv \mathrm{const}$	Решения уравнения (8) неустойчивы
$p \geq 0$, $q \geq 0$ (оба неравенства выполняются вместе, причем $\lvert p\rvert + \lvert q\rvert \neq 0$)	F – любое решение, кроме $F \equiv \mathrm{const}$	Решения уравнения (8) условно устойчивы
$p = 0$, $q > 0$	$F \equiv \mathrm{const}$	Решения уравнения (7) неустойчивы (хотя решения уравнения (8) устойчивы)
$p = 0$, $q \leq 0$	$F \equiv \mathrm{const}$	Решения обоих уравнений (7) и (8) устойчивы

В силу вышеизложенного три четверти плоскости параметров p, q соответствуют неустойчивым решениям. Важно отметить, что описанная выше абсолютная неустойчивость течений не связана с конкретным профилем скорости и реализуется за счет уравнения (8), отвечающего за поперечные компоненты скорости жидкости. Поскольку в уравнение (11) и формулы (13) не входит вязкость жидкости ν, то указанные результаты не зависят от числа Рейнольдса, то есть свойство неустойчивости решений имеет место не только при достаточно больших, но и при малых числах Рейнольдса ($0 < \mathrm{Re} < \infty$).

2) *Вырожденный случай* $F_z \equiv 0$. Пусть

$$F = a = \mathrm{const} \qquad (p = 0). \tag{14}$$

Тогда любое решение уравнения (8), которое при переходе от z, t к новым переменным t, $\xi = z - at$ сводится к классическому уравнению теплопроводности, является устойчивым при любых значениях параметров a и q.

Замечание. Аналогичным образом с помощью уравнений (10), (11) можно исследовать на устойчивость нестационарные решения уравнений (7), (8) при переменных $p = p(t)$, $q = q(t)$.

7. Анализ устойчивости решений $F = \mathrm{const}$ уравнения (7) при $p = 0$.

1) Сначала исследуем на устойчивость тривиальное решение $F = 0$ уравнения (7) при $p = 0$ для различных значений параметра $q = \mathrm{const}$. Уравнение (7) допускает точное решение

$$F = \varepsilon e^{ikz+\lambda t}, \quad \lambda = q - \nu k^2, \tag{15}$$

где ε, k, λ – действительные числа. Это решение является также решением линеаризованного уравнения (7), в котором отброшены квадратичные члены (чрезвычайно редкий случай). Модуль разности между решением (15) и тривиальным решением в начальный момент времени равен $\lvert\varepsilon\rvert$ (за счет выбора ε эту разность можно сделать сколь угодно малой).

При $q - \nu k^2 > 0$ тривиальное решение будет неустойчивым, а при $q - \nu k^2 < 0$ – устойчивым. Граница устойчивости представляет собой параболу $q = \nu k^2$ в плоскости k, q. При уменьшении вязкости жидкости $\nu \to 0$ (что соответствует увеличению чисел Рейнольдса) ветви параболы стремятся к линии $q = 0$, а область неустойчивости расширяется и в пределе распространяется на всю верхнюю полуплоскость $q > 0$. Увеличение ν или k приводит к расширению области устойчивости.

Поскольку параметром k можно свободно распоряжаться, то при любом $q > 0$ за счет выбора k можно добиться неустойчивости тривиального решения.

2) Рассмотрим теперь произвольное стационарное решение уравнения (14). Вместо (15) возьмем теперь функцию

$$F = \varepsilon e^{ik(z-at)+\lambda t} + a, \quad \lambda = q - \nu k^2, \tag{16}$$

которая в силу свойства (9) при $\psi(t) = -at$ также является решением уравнения (7). Модуль разности между решениями (14) и (16) в начальный момент времени можно сделать сколь угодно малой за счет выбора ε. Все критерии устойчивости и неустойчивости решения (14) в зависимости от параметров k, q остаются теми же самыми, что и для тривиального решения.

Замечание. Из результатов пп. 6, 7 следует, что при $p = 0$, $q \leq 0$ устойчивым является только постоянный профиль продольной компоненты скорости $F = \mathrm{const}$.

В таблице подведены общие итоги анализа неустойчивости и устойчивости ограниченных решений системы (7), (8) при различных значениях параметров p и q. Видно, что область неустойчивости значительно шире (она занимает три квадранта из четырех в плоскости p, q), чем область устойчивости.

8. Физическая интерпретация решений. Будем рассматривать течения вязкой несжимаемой жидкости, когда вектор скорости жидкости на оси z направлен вдоль этой оси. Вблизи оси z поперечные компоненты скорости малы, и их можно разложить в ряд Тейлора по поперечным координатам x и y. Если в компонентах скорости ограничиться главными членами разложения по x и y, то можно получить представление (2), откуда следует (3).

Любые течения жидкости, имеющие две плоскости симметрии, допускают представление вида (2) в окрестности линии пересечения этих плоскостей (в используемых обозначениях линия пересечения плоскостей задает ось z). К таким течениям относятся осесимметричные течения, вращательно-симметричные течения (в частности, течения кармановского типа [1, 9, 10, 15]), плоские течения, симметричные относительно прямой линии, течения в прямолинейных непроницаемых и пористых трубах с эллиптическим и прямоугольным сечением, струи жидкости, вытекающие из отверстий эллиптической и прямоугольной формы и т.д. Указанное свойство точных решений уравнений Навье – Стокса вида (2) позволяет использовать их для приближенного описания широкого класса "осевых" течений.

9. Обсуждение результатов. Описанная выше неустойчивость решений уравнений Навье–Стокса в широком диапазоне изменения параметров p и q ($q < 0$, $p \neq 0$ – любое или $p < 0$, q – любое) происходит при любой форме профиля поперечной компоненты скорости жидкости и не зависит от числа Рейнольдса (то есть свойство неустойчивости рассматриваемого класса решений имеет место не только при достаточно больших, но и при произвольно малых числах Рейнольдса, $\mathrm{Re} \neq 0$). Этот эффект обусловлен неустойчивостью поперечных компонент скорости жидкости, которые описываются уравнением (8).

Твердые границы, на которых выставляется условие прилипания жидкости, обычно являются стабилизирующим фактором. При увеличении числа Рейнольдса течение жидкости в ядре потока постепенно перестает "ощущать" влияние граничных условий. При достижении критического числа Рейнольдса механизм неустойчивости решений уравнений Навье–Стокса становится доминирующим и реализуется турбулентный режим течения (при течении жидкостей в гладких трубах критическое число Рейнольдса достигает нескольких тысяч [15]).

При отсутствии твердых границ неустойчивость решений уравнений Навье–Стокса проявляется значительно быстрее. Например, ламинарные струи теряют устойчивость уже при небольших числах Рейнольдса, $\mathrm{Re} \approx 5$ [15].

Автор благодарит С.Н. Аристова и В.В. Дильмана за полезные обсуждения и замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты # 08-08-00530, # 09-01-00343).

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, 3-е изд., М.: Наука, 1986.
2. W. I. Fushchich, W. M. Shtelen, and S. L. Slavutsky, J. Physics A: Math. and Gen. **24**, 971 (1991).
3. D. K. Ludlow, P. A. Clarkson, and A. P. Bassom, J. Physics A: Math. and Gen. **31**, 7965 (1998).
4. А. Д. Полянин, ДАН **380**, 491 (2001).
5. S. N. Aristov and I. M. Gitman, J. Fluid Mech. **464**, 209 (2002).
6. A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press., 2004.
7. S. V. Meleshko, Nonlinear Dynamics **36**, 47 (2004).
8. А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов, *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*, М.: Физматлит, 2005.
9. В. В. Пухначев, Успехи механики **4**, 6 (2006).
10. P. G. Drazin and N. Riley, *The Navier – Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*, Cambridge Univ. Press, 2006.
11. С. Н. Аристов, А. Д. Полянин, ДАН **427**, 35 (2009).
12. М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн, *Гидродинамическая устойчивость и турбулентность*, Новосибирск: Наука, 1977.
13. *Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности*, ред. Х. Суинни, Дж. Голлаб, М.: Мир, 1984.
14. C. C. Lin, Arch. Rational Mech. Anal. **1**, 391 (1958).
15. A. D. Polyanin, A. M. Kutepov, A. V. Vyazmin, and D. A. Kazenin, *Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering*, London: Taylor & Francis, 2002.