Письма в ЖЭТФ, том 92, вып. 2, с. 111 – 113 © 2010 г. 25 июля

Статистическая геометрия двумерного хаотического переноса

И. В. Колоколов[1)]

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 8 июня 2010 г.

В задаче о хаотическом двумерном переносе вычисляется совместная функция распределения двух расстояний между тремя лагранжевыми частицами.

Статистика флуктуаций скорости в хаотическом течении существенно влияет на статистические свойства переносимых им объектов и полей (см. обзор [1] и ссылки там). На относительно малых расстояниях (меньших колмогоровской вязкой длины η, см. [2, 3]) или в условиях эластической турбулентности полимерных растворов [4] поле скорости является гладкой функцией координат. Для многих физических систем и процессов (скалярные примеси, химические реакции, магнитное динамо и т.д.) однородный перенос не играет роли. Он исключается переходом в систему координат, связанную с какой-нибудь лагранжевой частицей. В ее окрестности поле скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ можно разложить в ряд Тэйлора. Если масштабы интересующих нас явлений малы в сравнении с длиной η, то можно ограничиться первым членом этого разложения [5]: $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)=\hat\sigma(t)\mathbf{r}$; покомпонентно:

$$v_j(\mathbf{r},t)=\sigma_{jl}(t)r_l. \tag{1}$$

Здесь матрица градиентов скорости $\hat\sigma(t)$ – случайная функция времени t. Течение (1) осуществляет линейное отображение пространства на себя:

$$\mathbf{r}\longrightarrow\mathbf{r}(t)=\hat W(t)\mathbf{r},\quad \hat W(t)=\mathrm{T}\exp\left[\int_0^t d\tau\,\hat\sigma(\tau)\right]. \tag{2}$$

Знак $T\ldots$ обозначает здесь хронологическое упорядочение. Известно [6] (см. также [1, 3]), что на достаточно больших временах для случайного процесса $\hat\sigma(t)$ общего положения длина вектора $\mathbf{r}(t)$ экспоненциально растет со временем, причем ляпуновская экспонента $\bar\lambda=t^{-1}\ln\left(\mathbf{r}^2(t)/\mathbf{r}^2\right)$ является самоусредняющейся величиной. Для качественного понимания целого ряда физических явлений в хаотических потоках (перемешивание [7 – 11], магнитное динамо [12 – 14]) достаточно только этого утверждения. Однако во многих случаях физические наблюдаемые определяются статистическими свойствами элементов матрицы $\hat W(t)$. Они же, в свою очередь, зависят от характеристик случайного процесса $\hat\sigma(t)$. Сюда относятся, в первую очередь, многоточечные корреляционные функции переносимых полей [15 – 17] и моменты их градиентов [18, 19]. Также непосредственно измеримы геометрические свойства комплексов, построенных из близких лагранжевых частиц. Для функции распределения логарифмов расстояний между двумя такими частицами негауссовыми могут быть лишь достаточно далекие хвосты [1, 8, 10]. Для трех лагранжевых маркеров совместная функция распределения расстояний между ними нетривиальна и для типичных событий.

В данной работе мы вычислим такую функцию распределения для двумерного несжимаемого ($\mathrm{Tr}\,\hat\sigma(t)=0$) потока с гауссовой статистикой элементов $\hat\sigma(t)$:

$$\langle\sigma_{jk}(t)\sigma_{lm}(t')\rangle=\mathcal{G}\left(3\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl}-\delta_{jk}\delta_{lm}\right)\delta(t-t'). \tag{3}$$

Вес усреднения, соответствующий коррелятору (3), имеет вид

$$\mathcal{D}\hat\sigma(\tau)\exp\left\{-\frac{1}{16\mathcal{G}}\int d\tau\left[3\mathrm{Tr}\left(\hat\sigma\hat\sigma^T\right)+\mathrm{Tr}\left(\hat\sigma^2\right)\right]\right\}. \tag{4}$$

Для эволюционной матрицы $\hat W(t)$ используем параметризацию Ивасавы:

$$\hat W(t)=\hat R(\varphi)\begin{pmatrix}e^\rho & 0\\ 0 & e^{-\rho}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \chi(t)\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $\hat R(\varphi)$ – матрица двумерных вращений. Подстановка $\hat\sigma=\dot{\hat W}\hat W^{-1}$, где $\hat W$ представлена в виде (5), в меру (4) и интегрирование по вращениям $\hat R(\varphi(\tau))$ приводит меру усреднения к виду [18, 19]

$$\mathcal{N}e^{-Dt/2}\mathcal{D}\chi\mathcal{D}\rho\left(\prod_\tau e^{2\rho(\tau)}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2\mathcal{G}}\int_0^t d\tau\left(\dot\rho^2+\frac{1}{4}e^{4\rho}\dot\chi^2\right)+\rho(t)\right\}. \tag{6}$$

Ультралокальное произведение по τ и последнее слагаемое в экспоненте в (6) происходят из якобиана

[1)]e-mail: kolokol@itp.ac.ru

перехода к переменным ρ и χ. Вес усреднения по траекториям (6) имеет вид меры Фейнмана–Каца, и функция распределения $\mathcal{P}(\chi,\rho,t)$ параметров χ и ρ удовлетворяет, таким образом, уравнению

$$\partial_t \mathcal{P} = \frac{\mathcal{G}}{2}\left[e^{\rho}\left(\partial_\rho^2 + 4e^{-4\rho}\partial_\chi^2\right)e^{-\rho} - 1\right]\mathcal{P}. \qquad (7)$$

Решение эволюционной задачи (7) с начальным условием $\mathcal{P}(\chi,\rho,t=0) = \delta(\rho)\delta(\chi)$ находится явно; преобразование Фурье по переменной χ сводит ее к евклидовской квантовой механике с экспоненциальным потенциалом

$$\begin{gathered}\mathcal{P}(\chi,\rho,t) = \exp\left(-\mathcal{G}t/2\right)e^{\rho}\int\frac{dq}{2\pi}e^{i\chi q}F(\rho,q,t),\\ \partial_t F = \left(\partial_\rho^2 - 4q^2e^{-4\rho}\right)F,\end{gathered} \qquad (8)$$

с собственными функциями гамильтониана $\propto K_{i\nu}\left(|q|e^{-2\rho}\right)$, где $K_{i\nu}(z)$ – функции Макдональда, так что

$$F(\rho,q,t) = \\ = \frac{2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\nu\nu\,\mathrm{sh}\pi\nu K_{i\nu}(|q|e^{-2\rho})K_{i\nu}(|q|)\exp(-2\mathcal{G}\nu^2 t). \quad (9)$$

Используя интегральное представление функций Макдональда [20], можно выполнить обратное фурье-преобразование по переменной χ; окончательный результат может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{gathered}\mathcal{P}(\chi,\rho,t) = \exp\left(-\mathcal{G}t/2\right)\frac{e^{2\rho}}{8\left(\pi\mathcal{G}t\right)^{3/2}}\Phi\left(z\right),\\ z = \mathrm{ch}2\rho + \chi^2 e^{2\rho}/2,\end{gathered} \qquad (10)$$

где функция $\Phi(z)$ определена через интегральное представление:

$$\Phi(z) = \int_{s_0(z)}^{\infty}\frac{ds\, s}{\sqrt{\mathrm{ch}s - z}}\exp\left(-\frac{s^2}{8\mathcal{G}t}\right), \quad s_0(z) = \mathrm{arcch}z. \qquad (11)$$

Интегрирование полной функции распределения $\mathcal{P}(\chi,\rho,t)$ по $d\chi$ воспроизводит хорошо известный результат [1, 21], обычно выражаемый в терминах функции распределения $p(\lambda,t)$ для флуктуирующего ляпуновского показателя $\lambda = \rho/t$:

$$p(\lambda,t) = \sqrt{\frac{t}{2\pi\mathcal{G}}}\exp\left[-\frac{t}{2\mathcal{G}}\left(\lambda - \mathcal{G}\right)\right], \qquad (12)$$

имеющей гауссов вид. Наше полное выражение (10) будет выглядеть более симметрично, если его переписать в виде совместного распределения в момент времени t длин l_1 и l_2 двух векторов, образованных тремя лагранжевыми частицами из нашего потока: $l_{1,2} = |\hat{W}(t)\mathbf{r}_{1,2}$. Если в начальный момент времени эти векторы имели единичную длину и были взаимно перпендикулярны: $|\mathbf{r}_{1,2}| = 1, (\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2) = 0$, для вероятности обнаружить значения (l_1,l_2) имеет место равенство

$$\mathrm{P}(l_1,l_2)dl_1dl_2 = \frac{l_1l_2dl_1dl_2}{\sqrt{l_1^2l_2^2-1}}\Phi\left(\frac{l_1^2+l_2^2}{2}\right). \qquad (13)$$

Возвращаясь к функции распределения (10) параметров ρ и χ, рассмотрим асимптотику $\rho \gg 1$, определяющую средние от наблюдаемых в задаче о кинематическом динамо [1, 13, 14] и некоторых задачах о пассивном переносе [11, 18]:

$$\mathcal{P}(\chi,\rho,t) \approx \frac{1}{4\pi\mathcal{G}t\sqrt{\rho}}\left(1+\chi^2\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{\rho}{2\mathcal{G}t}}\exp\left[-\frac{\rho^2}{2\mathcal{G}t}+\rho\right]. \qquad (14)$$

Данное выражение является явной иллюстрацией явления "замерзания" переменной χ на больших временах: при вычислении средних от положительных степеней параметра растяжения $\exp(a\rho)$, $a > 0$, доминирующий вклад в интегрирование по ρ дает окрестность точки $\rho = \mathcal{G}t(1+a)$, и статистика переменной χ оказывается эффективно от времени не зависящей. Отсутствие особенностей в этой эффективной функции распределения весьма существенно для универсальности корреляционных функций, вычисленных в работах [11, 13, 15, 17].

Автор благодарен Я.Г. Синаю за интерес к работе и С.С. Вергелесу, В.В. Лебедеву и М.В. Черткову за полезные замечания. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант # 09-02-01346-а, и ФЦП "Кадры".

1. G. Falkovich, K. Gawedzki, and M. Vergassola, Rev. Mod. Phys. **73**, 913 (2001).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Гидродинамика, М.: Физматлит, 2003.
3. U. Frisch, *Turbulence: The legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. (Перевод: У. Фриш, *Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова*, М.: Фазис, 1998).
4. A. Groisman and V. Steinberg, Nature **405**, 53 (2000).
5. G. K. Batchelor, J. Fluid. Mech. **5**, 113 (1959).
6. H. Furstenberg, Trans. Amer. Math. Soc. **108**, 377 (1963).
7. B. Shraiman and E. Siggia, Phys. Rev. E **49**, 2912 (1994).

8. M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Rev. E **51**, 5609 (1995).
9. D. Bernard, K. Gawedzki, and A. Kupiainen, J. Stat. Phys. **90**, 519 (1998).
10. E. Balkovsky and A. Fouxon, Phys. Rev. E **60**, 4164 (1999).
11. M. Chertkov, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Fluids **19**, 101703 (2007)
12. С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, УФН **145**, 593 (1985).
13. M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, and M. Vergassola, Phys. Rev. Lett. **83**, 4065 (1999).
14. V. R. Kogan, I. V. Kolokolov, and V. V. Lebedev, J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 182001, (2010).
15. E. Balkovsky, M. Chertkov, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Письма в ЖЭТФ **61**, 1012 (1995).
16. A. Celani and M. Vergassola, Phys. Rev. Lett. **86**, 424 (2001).
17. S. S. Vergeles, ЖЭТФ **129**, 777 (2006).
18. M. Chertkov, G. Falkovich, and I. Kolokolov, Phys. Rev. Lett. **80**, 2121 (1998).
19. A. Gamba, I. Kolokolov, J. of Stat. Phys. **94**, 759 (1999).
20. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцедентные функции*, т.2, М.: Наука, 1974.
21. M. Chertkov, Y. Fedorov, and I. Kolokolov, J. of Phys. A **27**, 4925 (1994).