Письма в ЖЭТФ, том 96, вып. 2, с. 128 – 134 © 2012 г. 25 июля

Калибровочная суперсимметричная модель Изинга на кубической решетке вблизи критической точки в представлении свободных полей

С. Н. Вергелес[1)]

Институт теоретической физики им. Ландау РАН 142432, Черноголовка, Россия

Кафедра теоретической физики, Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 4 апреля 2012 г.
После переработки 7 июня 2012 г.

Путем изучения корреляторов степеней свободы калибровочной "суперсимметричной" модели Изинга на кубической решетке установлена природа совокупности тех свободных полей, которые представляют систему в критической точке. Эта же совокупность свободных полей представляет континуальную суперсимметричную абелеву калибровочную теорию. Таким образом, оправдано название решеточной системы. Проведено сравнение с $2D$-моделью Изинга.

1. В работе автора [1] был предложен метод вычисления статистической суммы $2D$-модели Изинга, наиболее явно использующий тот факт, что динамика модели может быть описана свободным фермионным майорановским полем на решетке (см., например, [2]). В [1] сумма всех замкнутых контуров с самопересечениями на прямоугольной планарной решетке[2)] была представлена (с точностью до регулярного и легко контролируемого множителя, зависящего лишь от температуры) как след от некоторой матричной экспоненты, устроенной следующим образом: каждой вершине решетки приписана независимая γ-матрица Дирака (или майорановский фермион). Под знаком экспоненты находится зависящая от температуры квадратичная относительно набора γ-матриц форма. Эта квадратичная форма может рассматриваться как гамильтониан системы, который в критической точке становится локальным в x-пространстве. Следует заметить, что майорановские фермионы связаны с привычными спиновыми изинговскими σ-переменными достаточно сложным нелокальным преобразованием [2].

Вскоре этот метод был применен к вычислениям на трехмерной решетке. В работе [4] была вычислена сумма по всем замкнутым поверхностям и поверхностям с краем. Оба типа поверхностей могут пересекаться и иметь самопересечения. Каждой элементарной грани поверхности соответствует некий положительный вес, зависящий от единственного параметра ("температуры"). (По определению элементарной гранью поверхности называется ее часть, включающая четыре ближайшие вершины и четыре элементарных ребра решетки, последовательно соединяющих эти вершины.) Тем самым фактор, соответствующий каждой замкнутой поверхности, является положительным фактором в каждом слагаемом суммы. Однако факторы, соответствующие поверхностям с краем, могут иметь разные знаки, причем знак фактора зависит только от конфигурации края, но не зависит от поверхности, опирающейся на заданный край. Важная особенность такой суммы заключается в том, что имеется жесткая связь между факторами, соответствующими замкнутым поверхностям и поверхностям с краем. Поэтому невозможно обратить в нуль вклад от поверхностей с краем, не обращая при этом в нуль и вклад от замкнутых поверхностей, и наоборот. Этот факт, а также другие свойства суммы привели к следующей ее интерпретации: рассматриваемая сумма является дискретным решеточным вариантом суперсимметричной абелевой калибровочной системы, причем замкнутые поверхности моделируют вакуумные флуктуации одного лишь калибровочного поля, в то время как поверхности с краем представляют вакуумные рождения, распространения и аннигиляции пар фермионных частиц, взаимодействующих с калибровочным полем. Данная интерпретация основана исключительно на геометрическом рассмотрении системы и на аналогии с геометрическими картинами, возникшими в процессе высокотемпературных разложений в решеточных калибровочных системах, предложенных Вильсоном и Поляковым для изучения явления конфайнмента. Метод вычисления описанной суммы по поверхнос-

[1)]e-mail:vergeles@itp.ac.ru

[2)]Как известно [3], эта сумма контуров и является статистической суммой $2D$-модели Изинга, если каждому элементарному ребру контура, соединяющему ближайшие вершины решетки, приписывается один и тот же положительный вес.

тям полностью повторяет метод вычисления суммы по контурам в случае $2D$-модели Изинга. Разница состоит лишь в том, что в случае трехмерной решетки не вершинам, а элементарным ребрам решетки приписываются независимые γ-матрицы. В остальном за исключением чисто технических деталей вычисление воспроизводит вычисление статистической суммы в случае $2D$-модели Изинга. Таким образом, рассматриваемая трехмерная система также описывается свободным фермионным майорановским полем на решетке, что роднит ее с $2D$-моделью Изинга.

Обратим внимание на то, что указанная интерпретация суммы по поверхностям на трехмерной решетке как суперсимметричной решеточной системы имеет характер гипотезы, нуждающейся в более точном определении и последующем доказательстве. Согласно нашему определению решеточная система является суперсимметричной при выполнении следующих условий: 1) система имеет критическую точку относительно "температуры", в которой динамика моделируется континуальными полями, имеющими обычные трансформационные свойства относительно группы континуальных симметрий, 2) набор и динамика этих континуальных полей отождествляются с набором и динамикой полей некоторой континуальной суперсимметричной системы. В реальной ситуации о наличии свойств 1 и 2 можно судить по форме корреляторов различных переменных системы и их функций в критической точке.

В этой заметке именно по такой схеме изучается суперсимметричная решеточная система, определенная в [4]. Из формы различных корреляторов делается вывод, о том что рассматриваемая система в критической точке эквивалентна обычной континуальной суперсимметричной абелевой калибровочной теории. Таким образом, вышеупомянутая гипотеза оказывается оправданной. Этот результат здесь является основным.

Везде далее обозначения взяты из работ [1,4].

2. В работах [1,4] показано, что описанные выше статистические суммы (или квантовые амплитуды перехода, в зависимости от точки зрения) представляются в виде

$$Z = F\,\mathrm{tr}\mathcal{U}, \quad \mathcal{U} = \prod_k \exp\left[(\ln\rho_k)\, c_k^\dagger c_k - \frac{1}{2}\ln\rho_k\right]. \quad (1)$$

Здесь F – гладкая функция температуры или параметра, играющего роль температуры, не представляющая существенного интереса, а величины $\{c_k^\dagger,\, c_k\}$ являются фермиевскими образующими алгебры Гейзенберга:

$$[c_k^\dagger,\, c_{k'}]_+ \equiv c_k^\dagger c_{k'} + c_{k'} c_k^\dagger = \delta_{k,\,k'}, \quad [c_k,\, c_{k'}]_+ = 0. \quad (2)$$

В (1) операция tr вычисляется в фоковском пространстве, построенном при помощи этой алгебры Гейзенберга. Индекс "k" пробегает конечное число значений для конечных решеток. Для двумерной решетки множество индексов "k" отождествляется с половиной множества узлов обратной конечной двумерной решетки или множества квазиимпульсов на решетке: $k \to \mathbf{k} = (p,\, q)$, где

$$p = -\frac{\pi(M-2)}{M},\, -\frac{\pi(M-4)}{M},\, \ldots,\, 0,\, \frac{2\pi}{M},\, \ldots,\, \pi,$$

$$q = -\frac{\pi(N-2)}{N},\, -\frac{\pi(N-4)}{N},\, \ldots,\, 0,\, \frac{2\pi}{N},\, \ldots,\, \pi, \quad (3)$$

M – число столбцов, а N – число строк решетки. В случае трехмерной решетки $k \to \mathbf{k} = (p,\, q,\, r)$, где

$$r = -\frac{\pi(L-2)}{L},\, -\frac{\pi(L-4)}{L},\, \ldots,\, 0,\, \frac{2\pi}{L},\, \ldots,\, \pi, \quad (4)$$

p и q задаются согласно (3), а M, N и L – целые числа, задающие размеры решетки. Далее через $\mathbf{x}$ обозначаются радиусы-векторы узлов решетки, так что

$$\begin{gathered} \mathbf{x} = (m,\, n) \text{ или } \mathbf{x} = (m,\, n,\, l), \\ \text{где } 1 \le m,\, n,\, l \le M,\, N,\, L, \end{gathered} \quad (5)$$

в зависимости от того, какой размерности решетка подразумевается, а $\mathbf{kx}$ есть скалярное произведение введенных векторов. Тогда в двумерном случае

$$c_{\mathbf{k}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{kx}} \gamma_{\mathbf{x}} = c_{-\mathbf{k}}. \quad (6)$$

Здесь $\gamma_{\mathbf{x}}$ – те самые независимые матрицы Дирака (или элементы алгебры Клиффорда), которые приписываются каждому узлу решетки. На трехмерной решетке, как было сказано, каждому узлу с координатами $\mathbf{x}$ приписывается три независимых элемента алгебры Клиффорда, отнесенных к трем ребрам решетки, выходящим из узла в положительных направлениях. Обозначим совокупность этих трех элементов алгебры Клиффорда как $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}}$. Тогда на трехмерной решетке

$$\mathbf{c}_{\mathbf{k}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{MNL}} \sum_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{kx}} \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}} = \mathbf{c}_{-\mathbf{k}}. \quad (7)$$

На двумерной решетке величины (6) являются теми операторами, которые используются в (1), и

$$\rho_{\mathbf{k}} = \frac{1 - \left(e^{-ip} + e^{-iq}\right)\sin\psi\cos\psi}{1 - \left(e^{ip} + e^{iq}\right)\sin\psi\cos\psi}. \quad (8)$$

Параметр ψ играет роль температуры.

Однако на трехмерной решетке величины (7) лишь в результате определенного линейного преобразования, зависящего от квазиимпульса $\mathbf{k}$, приводятся к нужному виду, используемому в (1). Таким образом, для каждого узла имеется три пары операторов $(c^{\dagger}_{\mathbf{k}i}, c_{\mathbf{k}i})$, $i = 1, 2, 3$, т.е. индекс k в формулах (1) и (2) здесь заменяется двойным индексом $\mathbf{k}i$. Опуская подробности, приведем выражения для соответствующих величин ρ_i:

$$\rho_{1,2}(p, q, r) = \frac{-\eta \mp i\sqrt{4\chi\overline{\chi} - \eta^2}}{2\chi}, \quad \rho_3 = 1,$$

$$\eta \equiv \left(1 - 3\cos^4\psi + \sin^6\psi\right) + \sin^3\psi\left(e^{iq} + e^{-iq}\right) = \overline{\eta},$$

$$\chi = 1 + e^{iq}\sin^3\psi +$$
$$+ \left[e^{i(p+q)} + e^{i(p+r)} + e^{i(q+r)}\right]\cos^2\psi\sin^2\psi. \qquad (9)$$

Как и выше, параметр ψ играет здесь роль температуры, а точнее является функцией температуры, $\psi(T)$, причем $d\psi(T)/dT < 0$. Далее удобнее будет использовать параметр

$$\tau = \sin^2\psi, \quad \tau \xrightarrow[T\to\infty]{} T^{-1}. \qquad (10)$$

Нам понадобится выражение для свободной энергии трехмерной решеточной суммы. С точностью до гладкого относительно температуры слагаемого имеем

$$\mathcal{F} = -T\frac{MNL}{8\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi}dp\int_{-\pi}^{\pi}dq\int_{-\pi}^{\pi}dr\,\times$$
$$\times\ln\left[\tau^2 + 2(\nu - 1)\tau + 4\right],$$
$$\nu(p, q, r) \equiv \left[\cos(p+q) + \cos(p+r) + \cos(q+r)\right]. \qquad (11)$$

В [4] было указано, что при температуре

$$\sqrt{\tau_c} \equiv \sin\psi_c = \sqrt{4 - \sqrt{12}} < 1 \qquad (12)$$

аргумент логарифма в (11) обращается в нуль лишь при двух значениях квазиимпульса:

$$\mathbf{k}_c^{(1)} = \left(p_c^{(1)}, q_c^{(1)}, r_c^{(1)}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \qquad (13)$$

$$\mathbf{k}_c^{(2)} = \left(p_c^{(2)}, q_c^{(2)}, r_c^{(2)}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \qquad (14)$$

являясь положительным при всех остальных возможных значениях квазиимпульса. Очевидно, что $\nu(\mathbf{k}_c^{(i)}) = -3$, $i = 1, 2$. При более высоких температурах,

$$0 < \tau < \tau_c, \qquad (15)$$

аргумент логарифма в (11) при всех значениях квазиимпульса положителен. При более низких температурах,

$$1 > \tau > \tau_c \qquad (16)$$

имеется целый континуум значений квазиимпульсов, для каждого из которых аргумент логарифма в (11) оказывается нулевым или отрицательным. Эта область температур здесь не рассматривается.

Здесь изучается область температур, определяемая неравенством (15) в бесконечно близкой окрестности критической температуры (12). В этой области температур сумма на трехмерной решетке подобна изинговской сумме на двумерной решетке в том смысле, что в обоих случаях аргументы логарифмов, находящихся под знаками интегралов по квазиимпульсам в выражениях для соответствующих свободных энергий, либо всегда положительны, либо обращаются в нуль лишь в критической точке при выделенных значениях квазиимпульсов.

3. Теперь приступим к изучению различных корреляторов на трехмерной решетке вблизи критической точки. По определению средние от любых операторов вычисляются как

$$\langle\mathcal{O}\rangle \equiv \mathrm{tr}\left(\mathcal{O}\mathcal{U}\right)/\mathrm{tr}\mathcal{U}.$$

Так как статистическая сумма (1) – гауссовская, различные средние вычисляются тривиально при помощи теоремы Вика. С учетом (9) находим

$$\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}i}c_{\mathbf{k}i}\rangle = \frac{\sqrt{\rho_{\mathbf{k}i}}}{\sqrt{\rho_{\mathbf{k}i}} + \sqrt{\overline{\rho}_{\mathbf{k}i}}} =$$
$$= \frac{-\eta + 2\overline{\chi} \mp i\sqrt{4\chi\overline{\chi} - \eta^2}}{2\left(\chi + \overline{\chi} - \eta\right)}, \quad i = 1, 2. \qquad (17)$$

Здесь значение индекса $i = 1$ соответствует верхнему знаку, а $i = 2$ – нижнему. Так как $\rho_3 = 1$, очевидно, что соответствующая степень свободы фиктивна. Таким образом, на каждый узел решетки приходится по две степени свободы, так же как и в случае абелевой калибровочной системы плюс майорановского поля на трехмерной решетке.

Далее корреляторы (17) изучаются в критической точке $\tau = \tau_c$ (см. (12)) для значений квазиимпульсов, мало отличающихся от квазиимпульсов (13)–(14). Поэтому вводятся следующие обозначения:

$$c^{(j)}_{\mathbf{k}i} \equiv c_{\mathbf{k}_c^{(j)}+\mathbf{k},\, i}, \quad i, j = 1, 2. \qquad (18)$$

Таким образом, везде далее вектор $\mathbf{k} = (p,\, q,\, r)$ обозначает малое отклонение от одного из квазиимпульсов $\mathbf{k}_c^{(j)}$. Верхний индекс "(j)" фиксирует номер этого квазиимпульса. При фиксированном малом $\mathbf{k}$ все четыре оператора (18) являются независимыми.

При помощи (9) можно убедиться в том, что корреляторы $\langle c_{\mathbf{k}i}^{(i)\,\dagger} c_{\mathbf{k}i}^{(i)} \rangle$, $i = 1, 2$, имеют особенности, а корреляторы $\langle c_{\mathbf{k}i}^{(j)\dagger} c_{\mathbf{k}i}^{(j)} \rangle$, $i \neq j$, их не имеют (см. (13), (14)), причем сингулярные части равны, соответственно,

$$\langle c_{\mathbf{k}i}^{(i)\,\dagger} c_{\mathbf{k}i}^{(i)} \rangle_{\mathrm{sing}} = \\ = \frac{\mp 2i\tau_c^{3/2} - 4i(7\tau_c - 4)(p+q+r)}{\tau_c(1-\tau_c)\left[(p+q)^2 + (p+r)^2 + (q+r)^2\right]},\ i = 1,\, 2. \tag{19}$$

Напомним, что средние (19) вычисляются в критической точке по температуре ψ. При этом сингулярности имеют место при квазиимпульсах $\mathbf{k}$, стремящихся к нулю. Кроме выписанных выражений, в правых частях уравнений (19) имеются ряды по неотрицательным степеням квазиимпульсов $(p,\, q,\, r)$, которые не представляют интереса, не будучи сингулярными.

Данная ситуация подобна изученной в работе [5]. В [5] некие корреляторы (или гриновские функции) в ферми-жидкости имели особенности вблизи изолированных ферми-точек, местоположение которых в импульсном пространстве определялось характером взаимодействия в ферми-жидкости. Каждая особенность гриновской функции интерпретировалась как особенность гриновской функции некоторого поля независимых коллективных мод. Импульсом такой коллективной моды являлось отклонение её импульса от положения соответствующей ферми-точки в импульсном пространстве. Таким образом, если перейти на позицию эффективной феноменологической теории, то каждая ферми-точка порождала свои независимые поля коллективных мод, которые рассматривались как поля элементарных частиц. Среди таких элементарных частиц имелись как фермионы, так и бозоны. В частности, таким образом возникала эффективная теория гравитации, включающая все известные взаимодействия. Этот же подход к коллективным возбуждениям изучается в [6].

Здесь разница с описанной выше картиной заключается лишь в том, что для выделения элементарных полей с определенными физическими свойствами приходится составлять некие комбинации полей, порождаемых обеими особенностями исходных корреляторов (19). При этом следует считать, что все средние значения симметричны относительно одновременной замены нижних индексов, нумерующих сорта фундаментальных ферми-операторов, и верхних индексов, нумерующих точки (13) и (14) в пространстве квазиимпульсов:

$$i:\ 1 \longleftrightarrow 2, \qquad (j):\ (1) \longleftrightarrow (2). \tag{20}$$

Действительно, из (7) и (9) видно, что выражение $\mathcal{U}$ в (1) является инвариантом при замене $\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$, влекущей замены

$$\chi \leftrightarrow \overline{\chi}, \quad \rho_1 \leftrightarrow \overline{\rho}_2, \quad c_{\mathbf{k}1} \leftrightarrow c_{\mathbf{k}2}^{\dagger}. \tag{21}$$

Отсюда с учетом равенства $|\rho_{1,2}|^2 = 1$ следует указанная инвариантность. Поэтому учитывая лишь взаимно независимые и симметричные относительно преобразования (20) корреляторы, мы исчерпываем все степени свободы системы.

Для выделения фермионного поля рассмотрим линейные комбинации исходных ферми-операторов вида

$$a_{\mathbf{k}\,\pm} \equiv c_{\mathbf{k}1}^{(1)} \pm c_{\mathbf{k}2}^{(2)}. \tag{22}$$

При помощи (1) и (18), (19) находим (везде берется либо верхний, либо нижний знак)

$$\langle a_{\mathbf{k}\,\pm}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\,\pm} \rangle_{\mathrm{sing}} = \mathrm{const}\, \frac{-i(p+q+r)}{(p+q)^2 + (p+r)^2 + (q+r)^2}. \tag{23}$$

Путем замены импульсов

$$k_1 = \frac{p-q}{\sqrt{2}}, \quad k_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}(p+q+r), \quad k_3 = \frac{2r-p-q}{\sqrt{6}} \tag{24}$$

коррелятор (24) приводится к виду

$$\langle a_{\mathbf{k}\,\pm}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\,\pm} \rangle_{\mathrm{sing}} = \mathrm{const}\, \frac{-ik_2}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}. \tag{25}$$

Правая часть равенства (25) совпадает с гриновской функцией майорановского поля в континуальном трехмерном евклидовом пространстве, усредненной по вакуумной матрице плотности майорановского спинора. Действительно, действие свободного дираковского поля имеет вид

$$\mathcal{S}_{\mathrm{D}} = \int d^3x\, \varphi^{\dagger} i\gamma^i \partial_i \varphi,\ \gamma^1 = \sigma_x,\ \gamma^2 = \sigma_y,\ \gamma^3 = \sigma_z. \tag{26}$$

Майорановский спинор удовлетворяет условию

$$\varphi^{\dagger} = -\varphi^{\mathrm{T}} \gamma^2 \longleftrightarrow \varphi = \gamma^2 \varphi^{\dagger\mathrm{T}}, \tag{27}$$

где верхний индекс "T" означает транспонирование. Действие майорановского поля получается из дираковского (26) путем замены сопряженного поля согласно (27) и деления на два:

$$\mathcal{S}_{\rm M} = -\frac{1}{2}\int d^3x\, \varphi^{\rm T} i\gamma^2\gamma^i\partial_i\varphi. \qquad (28)$$

Отсюда следует вид гриновской функции свободного майорановского поля:

$$\mathfrak{S}_{\rm M}(\mathbf{k}) = \frac{\gamma^i\gamma^2 k_i}{\mathbf{k}^2}. \qquad (29)$$

Теперь выпишем вакуумную матрицу плотности майорановского спинора, которая получается путем замены $\varphi^\lambda\varphi^\mu \to \varrho^{\lambda\mu}$. Поэтому если при ортогональных преобразованиях трехмерного пространства спиноры преобразуются как (см. [7])

$$\varphi^{\lambda'} = U^{\lambda'}_{\lambda}\varphi^\lambda, \quad \det U^{\lambda'}_{\lambda} = 1, \qquad (30)$$

то матрица плотности преобразуется согласно выражению

$$\varrho^{\lambda'\mu'} = U^{\lambda'}_{\lambda}U^{\mu'}_{\mu}\varrho^{\lambda\mu} \quad \text{или} \quad \varrho' = U\varrho U^{\rm T}. \qquad (31)$$

Вакуумная матрица плотности должна быть инвариантной относительно преобразований (31). Единственной такой матрицей является

$$\varrho = -\frac{1}{2}\sigma_y, \quad U\sigma_y U^{\rm T} = \det U\cdot\sigma_y = \sigma_y. \qquad (32)$$

Нужно также учесть, что в пространстве спиноров имеется нетривиальный метрический тензор $g = i\sigma_y$ и все усреднения следует проводить согласно формуле

$$\langle X\rangle = {\rm tr}\,[g\cdot\varrho\cdot X] = {\rm tr}\left[(i\sigma_y)\left(-\frac{1}{2}\sigma_y\right)X\right] = -\frac{i}{2}{\rm tr}X, \qquad (33)$$

где второе равенство справедливо лишь для вакуумной матрицы плотности. Отсюда, в частности, видно, что $\langle\gamma^i\rangle_{\rm vac} = 0$ и

$$\langle\mathfrak{S}_{\rm M}(\mathbf{k})\rangle_{\rm vac} = \frac{-ik_2}{\mathbf{k}^2}, \qquad (34)$$

что совпадает с правой частью (25). Таким образом, левая часть равенства (25) является двухточечным коррелятором некоторого майорановского поля в импульсном представлении, усредненного по спинорной вакуумной матрице плотности.

Теперь построим из фундаментальных операторов (18) бозонные степени свободы (или бозонное поле). Рассмотрим операторы

$$b_{\mathbf{k}\,\pm} = c^{(1)}_{\mathbf{k}1}c^{(1)}_{\mathbf{k}2} \mp c^{(2)}_{\mathbf{k}1}c^{(2)}_{\mathbf{k}2}. \qquad (35)$$

Они не зависят от операторов (22), причем операторы (35) – бозевского типа. Все остальные операторы, которые дают сингулярности вблизи выделенных точек в пространстве квазиимпульсов, являются функциями операторов (22) и (35) и им сопряженных. Действительно, набор операторов (22) и (35) эквивалентен набору операторов

$$c^{(1)}_{\mathbf{k}1}, \quad c^{(2)}_{\mathbf{k}2}, \quad c^{(1)}_{\mathbf{k}1}c^{(1)}_{\mathbf{k}2}, \quad c^{(2)}_{\mathbf{k}1}c^{(2)}_{\mathbf{k}2}.$$

При помощи простых алгебраических операций из совокупности этих операторов и им сопряженных выделяются элементарные операторы $c^{(1)}_{\mathbf{k}2}$ и $c^{(2)}_{\mathbf{k}1}$:

$$\left[c^{(1)\dagger}_{\mathbf{k}1},\, c^{(1)}_{\mathbf{k}1}c^{(1)}_{\mathbf{k}2}\right] = c^{(1)}_{\mathbf{k}2}, \quad \left[c^{(2)\dagger}_{\mathbf{k}2},\, c^{(2)}_{\mathbf{k}1}c^{(2)}_{\mathbf{k}2}\right] = -c^{(2)}_{\mathbf{k}1}.$$

Таким образом, совокупность операторов (22) и (35) и им сопряженных эквивалентна совокупности всех независимых операторов $c^{(j)}_{\mathbf{k}i}$, $i,j = 1,2$, и им сопряженных. При этом именно комбинации операторов (22) и (35) дают такие сингулярности вблизи выделенных точек в пространстве квазиимпульсов, которые поддаются физической интерпретации. Поэтому последние исчерпывают все эффективные степени свободы системы вблизи критической точки. Это утверждение может быть сформулировано точнее: любой оператор, являющийся функцией операторов (18), может быть разложен по операторам (22) и (35), причем коэффициентами разложения будут многочлены относительно операторов $c^{(2)}_{\mathbf{k}\,1}$ и $c^{(1)}_{\mathbf{k}\,2}$.

В связи с обсуждаемой проблемой следует упомянуть работу [8], в которой также строятся бозонные операторы из фундаментальных фермионных операторов. Бозонные операторы в [8] являются, как и здесь, билинейными формами относительно фермионных операторов. В результате коммутаторы бозонных операторов с фермионными пропорциональны линейным формам фермионных операторов. Тем не менее часть таких билинейных форм обладает свойствами бозонных операторов уничтожения, а им сопряженные – свойствами бозонных операторов рождения. И те и другие не зависят от фундаментальных фермионных операторов. Данный факт устанавливается путем изучения вакуумных средних от парных произведений этих бозонных операторов. Здесь имеет место аналогичная ситуация, хотя во многом контексты в этих двух случаях сильно различаются.

При помощи (17) находим

$$\langle c^\dagger_{\mathbf{k}1}c_{\mathbf{k}1}\rangle\langle c^\dagger_{\mathbf{k}2}c_{\mathbf{k}2}\rangle = \frac{\overline{\chi}}{\chi+\overline{\chi}-\eta}. \qquad (36)$$

Отсюда с учетом равенств (9) и (12) получаем (берется либо верхний, либо нижний знак)

$$\langle b^{\dagger}_{\mathbf{k}\,\pm} b_{\mathbf{k}\,\pm}\rangle_{\rm sing} = \frac{\overline{\chi}^{(1)} + \overline{\chi}^{(2)}}{\chi + \overline{\chi} - \eta} \sim \frac{\eta(\mathbf{k}=0)}{\chi + \overline{\chi} - \eta} \sim \frac{1}{\mathbf{k}^2}. \quad (37)$$

Вид правой части последнего уравнения показывает, что его левая часть является коррелятором от соответствующей фурье-компоненты некоторого бозонного поля. Здесь такой компонентой может быть только фурье-компонента абелева калибровочного поля.

Укажем также, что корреляторы (25) и (37) обладают стандартными трансформационными свойствами относительно группы вращений $O(3)$ как корреляторы свободных майорановского и бозонного полей соответственно. Все прочие вакуумные средние, имеющие особенности, не обладают трансформационными свойствами, поддающимися интерпретации.

Теперь заметим, что симметрия (20), основанная на преобразованиях (21), уменьшает число реальных степеней свободы и фермионных, и бозонных полей в два раза. В результате мы имеем в эффективной континуальной теории одно абелево калибровочное поле и одно майорановское поле, которые объединяются в одно суперполе. Этому результату обязана своим названием статья [4].

4. Интересно сравнить полученные формулы с аналогичными формулами в двумерной модели Изинга. Используя статистическую сумму (1), для среднего операторов (6) при помощи (8) находим

$$\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{\sqrt{\rho_{\mathbf{k}}}}{\sqrt{\rho_{\mathbf{k}}} + \sqrt{\overline{\rho}_{\mathbf{k}}}} = \frac{\eta_{\mathbf{k}}}{\eta_{\mathbf{k}} + \overline{\eta}_{\mathbf{k}}}. \quad (38)$$

В точке фазового перехода $\sin\psi_c \cos\psi_c = 1/2$. Аналогом квазиимпульсов (13) и (14) в данном случае является квазиимпульс $\mathbf{k} = 0$. Поэтому в точке фазового перехода (см. (8))

$$\eta_{\mathbf{k}} = 1 - \frac{1}{2}(e^{-ip} + e^{-iq}) \xrightarrow[\mathbf{k}\to 0]{} \frac{i}{2}(p+q),$$

$$\eta_{\mathbf{k}} + \overline{\eta}_{\mathbf{k}} \xrightarrow[\mathbf{k}\to 0]{} \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right) \quad (39)$$

и

$$\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}\rangle \xrightarrow[\mathbf{k}\to 0]{} \frac{i(p+q)}{p^2+q^2} = 2\frac{-ik_2}{k_1^2 + k_2^2}, \quad (40)$$

если

$$p = \frac{1}{2}(-k_1 - k_2), \quad q = \frac{1}{2}(k_1 - k_2).$$

Из сравнения (40) и (34) видно, что двумерную модель Изинга вблизи точки фазового перехода можно интерпретировать как систему свободного майорановского поля.

5. Рассмотрим поведение свободной энергии (11) вблизи критической точки τ_c. Сингулярная часть свободной энергии представляется как

$$\mathcal{F}_{\rm sing} = -T\frac{MNL}{\pi^2}\int_0^{\infty} k^2 dk \ln\left(\tau^2 - 8\tau + 4 + \mathbf{k}^2\right), \quad (41)$$

где $\mathbf{k}$ – переменные (24). Верхний предел интегрирования в (41) можно распространить до бесконечности, так как интересующая нас часть этого интеграла быстро сходится на бесконечности. Поскольку вблизи критической точки $\tau^2 - 8\tau + 4 = \alpha\cdot t$, где $t = T - T_c$, $\alpha > 0$ – некоторая константа, теплоемкость

$$-T\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial T^2}\right)^{3D}_{\rm sing} = -\frac{4MNL}{\pi^2}\left[(4-\tau_c)T\left(\frac{d\tau}{dT}\right)_{\tau=\tau_c}\right]^2 \times$$
$$\times \int_0^{\infty}\frac{k^2 dk}{\left(\alpha t + k^2\right)^2} \sim -\beta t^{-1/2} < 0. \quad (42)$$

Отсюда следует, что свойства изучаемой трехмерной модели в рассматриваемой области температур существенно отличаются от свойств двумерной модели Изинга.

Легко проследить за качественным отличием теплоемкости в двумерной модели Изинга и в рассматриваемой трехмерной модели. В обеих моделях вблизи критических точек статистические суммы насыщаются континуальными интегралами по свободным полям, играющим роль квазичастиц. Таким образом,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_{\rm quasiparticles}. \quad (43)$$

В двумерном случае $\mathcal{F}_0^{2D\rm Ising}$ не имеет сингулярности по температуре и при вычислении эффективной статистической суммы интегрирование идет по свободному майорановскому полю. Поэтому

$$\mathcal{F}_{\rm quasiparticles} = \mathcal{F}_{\rm sing} \sim$$
$$\sim -T\ln\sqrt{\prod\nolimits_{\mathbf{k}}\epsilon_{\mathbf{k}}} \sim -T\int d^2k \ln(\mathbf{k}^2 + m^2), \quad (44)$$

где $\epsilon_{\mathbf{k}} = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ – собственные значения свободного массивного оператора Дирака. Так как в двумерном случае $m^2 = \alpha t^2$, имеем

$$-T\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial T^2}\right)^{2D\rm Ising}_{\rm sing} \sim$$
$$\sim \alpha T_c^2\int\frac{d^2k}{\mathbf{k}^2 + m^2} = 2\pi\alpha T_c^2 \ln\frac{1}{t} > 0. \quad (45)$$

(Такая же зависимость массы дираковского поля от параметра t имеет место и для решеточных фермионов в случае $2D$-модели Изинга, построенных как произведение параметров порядка и беспорядка в соседних узлах исходной и дуальной решеток (см. [2]). Таким образом, правомерна гипотеза о том, что известные фермионы, описанные в [2], и фермионы, описанные в [1], совпадают по крайней мере вблизи критической точки.)

С другой стороны, в рассматриваемой трехмерной модели $\mathcal{F}_0$ имеет свою собственную сингулярность, которая должна быть учтена вместе с сингулярностью, содержащейся в $\mathcal{F}_{\mathrm{quasiparticles}}$. В нашем случае сингулярности $\mathcal{F}_{\mathrm{quasiparticles}}$ взаимно сокращаются, так как мы имеем суперсимметричную систему. (Данный факт является фундаментальным в теориях с глобальной суперсимметрией: энергия основного состояния равна нулю.) Поэтому $\mathcal{F}_{0\,\mathrm{sing}}$ задается согласно (41) и дает теплоемкость вида (42). Следовательно, при $T \leq T_c$ $(1 > \tau > \tau_c)$ изучаемая система качественно перестраивается. Это видно, например, из того, что в области температур (16) свободная энергия (11) становится комплексной. Кроме того, квадраты масс квазичастиц ведут себя как $m^2 = \alpha t$. Поэтому в области температур (16) массы квазичастиц становятся мнимыми. Отсюда следует необходимость доопределения свободной энергии (11) в области температур (16). Однако здесь эта проблема не изучается.

6. В заключение сделаем следующее замечание. Рассмотренная трехмерная модель на решетке является суперсимметричной в указанном выше смысле. Кроме того, она является интегрируемой. Известная же трехмерная модель Изинга не является суперсимметричной ни в каком смысле, и она до настоящего времени не допускала точного решения. В связи с этим хочется обратить внимание на серьезное продвижение в области изучения $4D$-суперсимметричной модели Янга–Миллса ($N = 2$) и ее связь с двумерными конформными теориями (см., например, [9]). При изучении же обычной континуальной (несуперсимметричной) теории Янга-Миллса единственным реальным инструментом является теория возмущений, которая не дает возможности описать, например, явление конфайнмента даже на качественном уровне.

1. С. Н. Вергелес, ЖЭТФ **135**, 820 (2009); arXiv:0805.0225v1.
2. А. М. Поляков, *Калибровочные поля и струны*, ИТФ им. Л.Д.Ландау, 1995 (A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, in *Contemporary Concepts in Physics*, v.3, Harwood Academic Publishers, Chur, Switzerland, 1987).
3. Н. В. Вдовиченко, ЖЭТФ **7**, 715 (1964); Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. V, *Статистическая физика*, ч. 1, М.: Наука, 1976, § 151.
4. С. Н. Вергелес, ЖЭТФ **137**, 544 (2010); arXiv:0909.2204.
5. G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, Clarendon Press, Oxford, 2003, Ch. 8.
6. P. Horava, Phys. Rev. Lett. **95**, 016405 (2005).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. III, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, гл. VIII, М.: Наука, 1989.
8. P. A. M. Dirac, *Spinors in Hilbert Space*, Plenum Press, N.Y.–London, 1974.
9. N. Seiberg and E. Witten, hep-th/9407087, hep-th/9408099; N. A. Nekrasov, hep-th/0306211; L. F. Alday, D. Gaiotto, and Y. Tachikawa, hep-th/0906.3219.