

Энергетический портрет волн-убийц

В. Е. Захаров^{△+*×1)}, Р. В. Шамин^{*○∇1)}, А. В. Юдин^{○∇1)}

[△]Department of Mathematics, University of Arizona, 857201 Tucson, USA

⁺Физический институт им. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

^{*}Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

[×]Институт теоретической физики им. Ландау РАН, 119334 Москва, Россия

[○]Сахалинский государственный университет, 693000 Южно-Сахалинск, Россия

[∇]Российский университет дружбы народов, 117198 Москва, Россия

Поступила в редакцию 31 марта 2014 г.

С помощью вычислительных экспериментов, основанных на точных уравнениях гидродинамики идеальной жидкости, изучаются процессы концентрации энергии при образовании волн-убийц. На примере вычислительного эксперимента показано распределение аномалий волн как по высоте, так и по энергии. Установлена взаимосвязь между значениями концентраций энергии и высоты аномально больших поверхностных волн. Полученные результаты могут быть использованы для оценки опасности аномально больших поверхностных волн.

DOI: 10.7868/S0370274X14090057

1. Введение. Волны-убийцы представляют собой внезапные одиночные поверхностные волны большой высоты (до 30 м). Их внезапность и большая амплитуда несет серьезную опасность для морских объектов. Изучение этих волн началось в последние десятилетия. Единой теории экстремальных волн до сих пор нет. Волны-убийцы представляют не только прикладной, но и теоретический интерес [1, 2].

В последнее время наиболее популярным становится изучение волн-убийц на основе вычислительных экспериментов [3–8]. В наших предыдущих работах с помощью численных опытов мы рассматривали статистику волн-убийц, возникающих в результате нелинейной динамики поверхностных волн идеальной жидкости [9, 10]. В настоящей работе на основании вычислительных экспериментов проведена количественная оценка процессов концентрации энергии и импульса. Возможности численного моделирования волн-убийц позволяют “заглянуть внутрь” процессов, протекающих при их образовании.

2. Вычислительные эксперименты. В наших вычислительных экспериментах рассматривались волны, бегущие в одну сторону, что соответствует волнам зыби в океане. Эксперименты основывались на численном решении уравнения Эйлера

для идеальной жидкости со свободной поверхностью и бесконечной глубиной в 2D-геометрии:

$$-\infty < y < \eta(x, t),$$

$$0 < x < 2\pi.$$

Граничные условия по переменной x были 2π -периодическими. Предполагалось, что течение является потенциальным, а жидкость – несжимаемой. Отсюда

$$v(x, y, t) = \nabla\Phi(x, y, t), \quad \operatorname{div} v = 0.$$

Таким образом, потенциал поля скоростей жидкости Φ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\Phi(x, y, t) = 0.$$

Для организации численного счета мы использовали уравнения в конформных переменных, полученные в работе [11]. В работах [12–14] рассматривались математические вопросы корректности этих уравнений, а также проблемы численных расчетов. Уравнения в конформных переменных позволяют проводить нужные нам вычислительные эксперименты с высокой точностью на больших временных интервалах и наблюдать возникновение волн-убийц.

Мы осуществляли конформное отображение области, занятой жидкостью, на нижнюю полуплоскость (с координатами $w = u + iv$). Отображение задается функцией $z = z(w)$, $z = x + iy$.

¹⁾e-mail: zakharov@math.arizona.edu; roman@shamin.ru; yudinorel@gmail.com

Динамические уравнения записывались для переменных Дьяченко:

$$R = \frac{1}{z'_w}, \quad V = i \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Они имели форму

$$\dot{R}(u, t) = i(UR' - U'R) - \alpha R''''',$$

$$\dot{V}(u, t) = i(UV' - B'R) + g(R - 1) - \alpha V''''',$$

$$U = P(V\bar{R} + \bar{V}R),$$

$$B = P(V\bar{V}),$$

где P – оператор проектирования на нижнюю полуплоскость, $P = \frac{1}{2}(1 + iH)$; H – аналог оператора Гильберта для периодического случая:

$$H[f](u) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_0^{2\pi} \frac{f(u')}{\tan[(u' - u)/2]} du'.$$

В этих уравнениях мы использовали диссипацию для учета возможности обрушения волн в ходе эволюции, а также накачку энергии. Последняя служила для поддержания одинакового уровня энергии в течение всего эксперимента и включалась, когда энергия системы падала ниже необходимого уровня. Указанная диссипация использовалась в нашей предыдущей работе [10]. Форма накачки была модифицирована с целью придания ей физического смысла. Накачка имеет смысл поверхностной силы, действующей на свободную поверхность и пропорциональной наклону поверхности:

$$F = F_w \left| \frac{dy}{dx} \right|.$$

Коэффициенты α и F_w подбирались эмпирически так, чтобы в системе поддерживался заданный уровень энергии. Использование диссипации и накачки позволяет проводить вычисления на практически неограниченном временном интервале.

Обычно волны-убийцы регистрируются на основе амплитудного критерия

$$\nu(t) = \frac{H_{\max}(t)}{H_s(t)} \geq \nu^* = 2.1,$$

где H_{\max} – максимальная высота, а H_s – значительная высота волнения (среднее от трети самых высоких волн). Критическое значение $\nu^* = 2.1$ выбрано эмпирически. Оно используется во многих работах, посвященных волнам-убийцам [1].

3. Энергетические характеристики отдельных волн. В наших вычислительных экспериментах

мы рассматриваем периодический по пространственной переменной цуг волн. При этом профиль свободной поверхности задается функцией $y = y(x, t)$, являющейся 2π -периодической по переменной x . Будем называть отдельной волной область, расположенную между двумя локальными минимумами свободной поверхности.

Для каждой волны можно вычислить энергию E (кинетическую, T , и потенциальную, U), а также модуль импульса I (модуль горизонтальной, I_x , и вертикальной, I_y , проекции импульса) с помощью формул гидродинамики. Кроме того, мы вычисляли и геометрические характеристики отдельных волн (амплитуду A , крутизну M , кривизну C).

Для каждой характеристики мы рассчитывали числовой показатель, называемый концентрацией этой характеристики, как отношение ее максимального значения к среднему значению всех волн в цуге в фиксированный момент времени:

$$C_X = \frac{X_{\max}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i},$$

где X_i ($i = 1, \dots, N$) – характеристики отдельных волн, $X_{\max} = \max_i X_i$.

4. Пример образования волны-убийцы. Ранее в работах [9, 10] мы приводили масштабные вычислительные эксперименты по моделированию нелинейной динамики поверхностных волн с целью изучения статистики возникновения волн-убийц. При образовании экстремальных волн наблюдаются процессы концентрации энергии и импульса. Концентрация часто происходит по однотипному сценарию.

Рассмотрим характерный пример формирования волны-убийцы. В данном эксперименте начальное поле волнения состояло из цуга 53 волн, бегущих в одну сторону. Квадрат средней крутизны имел значение $\mu^2 = 3.72 \cdot 10^{-3}$. Длительность эксперимента составляла примерно 3525 периодов. Через 1412 периодов возникла волна-убийца. Профиль свободной поверхности на этот момент приведен на рис. 1. Значение функционала ν достигало

$$\nu(t^*) = 2.26.$$

Рассмотрим концентрацию полной энергии в момент образования волны-убийцы (рис. 2). Для наглядности на рисунке также приведена концентрация энергии в начальный момент времени. Из рис. 2 видно, что если в начальный момент времени распределение концентрации близко к линейной функции, то в момент образования волны-убийцы самая боль-

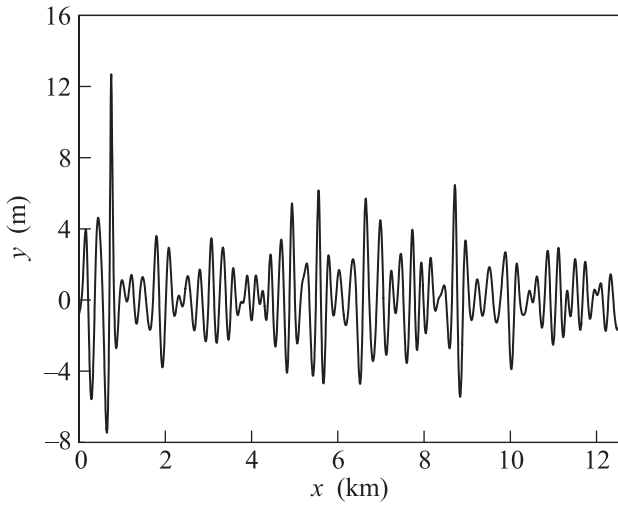


Рис. 1. Профиль типичной волны-убийцы

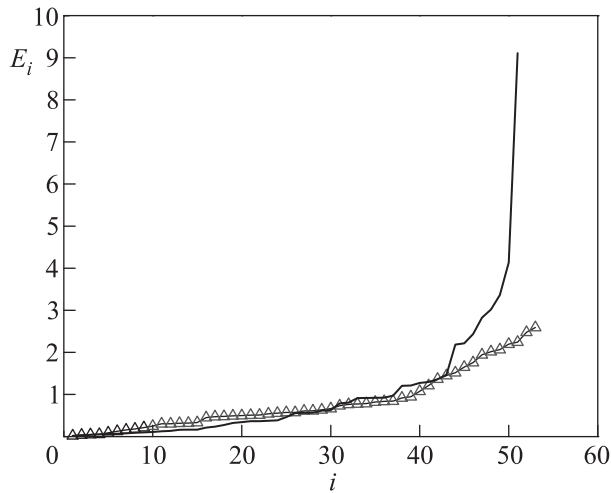


Рис. 2. Концентрация энергии: тонкая линия с треугольниками – в начальный момент, толстая – в момент образования волны-убийцы

шая волна концентрирует в себе большую часть энергии. Концентрация энергии $C_E = 9.1$. Аналогичная картина характерна и для импульса волны-убийцы.

Теперь рассмотрим совместное двумерное распределение параметра ν и концентрации полной энергии C_E для самой большой волны в каждый момент времени вычислительного эксперимента. Подавляющее большинство (около 98%) реализаций ν_{\max} , $C_{E_{\max}}$ подчиняется нормальному закону распределения вероятностей. Эти величины распределены следующим образом: $\nu_{\max} \sim N(1.54, 2.6 \cdot 10^{-2})$, $C_{E_{\max}} \sim N(4.8, 0.895)$. Коэффициент корреляции между этими величинами $r = 0.85$.

Построим эллипс рассеяния для данного примера, который имеет эксцентриситет $e = 0.985$ и эллип-

тичность $k = 0.029$ (рис. 3). Точки внутри эллипса

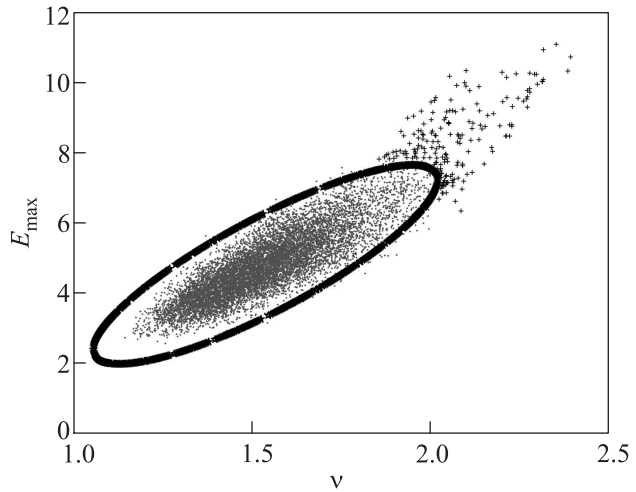


Рис. 3. Диаграмма совместного распределения параметров ν_{\max} и E_{\max}

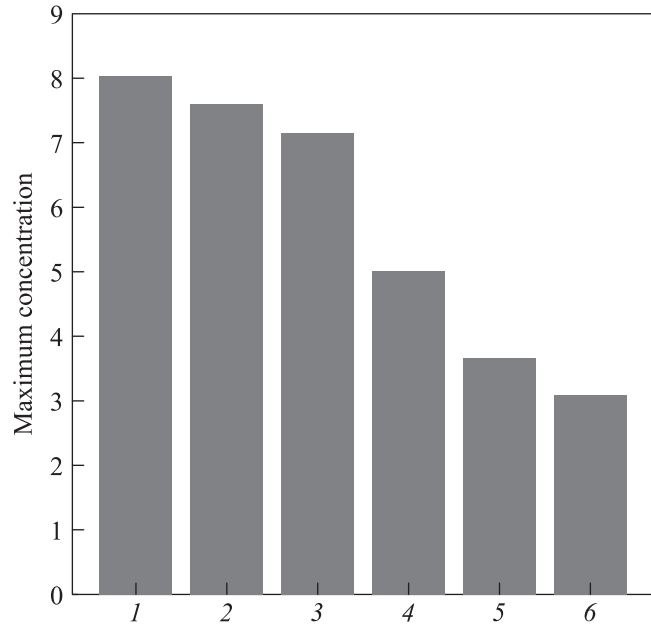


Рис. 4. Средние максимальные концентрации: 1 – кинетической энергии, 2 – полной энергии, 3 – потенциальной энергии, 4 – вертикального импульса, 5 – горизонтального импульса, 6 – модуль импульса

соответствуют парам $\{\nu_{\max}, C_{E_{\max}}\}$, распределенным по нормальному двумерному закону. Точки вне эллипса отвечают парам $\{\nu_{\max}, C_{E_{\max}}\}$, не удовлетворяющим нормальному закону. Они соответствуют, аномальным волнам, имеющим или аномально большую высоту, или аномально высокую энергию. Заметим, что наблюдаются их отклонения лишь в большую сторону.

На рис. 4 приведена гистограмма значений концентрации энергии и импульса, построенная по результатам большой серии вычислительных экспериментов с различными параметрами начального волнения. На этой гистограмме показаны средние значения максимальной концентрации характеристик в момент образования волны-убийцы.

Можно также построить регрессионную зависимость между значениями концентрации высоты волны-убийцы и концентрации ее энергии. По итогам большой серии вычислительных экспериментов мы фиксировали значения концентраций высоты и энергии для волн-убийц в тот момент времени, когда значение параметра ν для них было максимальным. Полученная регрессионная зависимость представлена на рис. 5. Уравнение линейной регрессии имеет

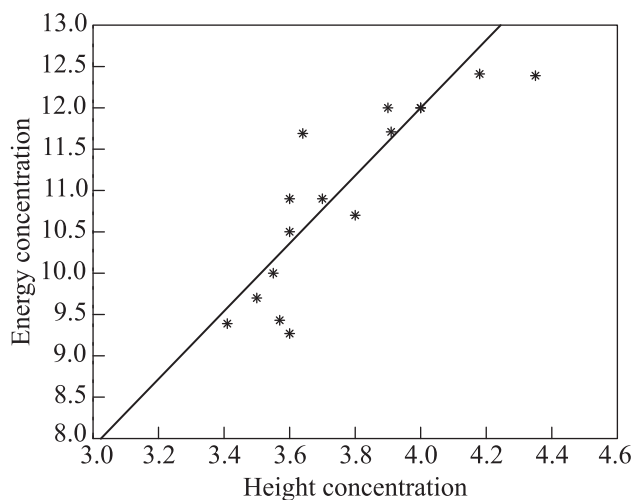


Рис. 5. Регрессионная зависимость между значениями концентраций высоты и энергии волн-убийц

вид $y = 4.1x - 4.4$. Коэффициент линейной детерминации $R^2 = 0.834$.

5. Заключение. Итак, в настоящей работе с помощью вычислительных экспериментов были рассмотрены нелинейные процессы локальной концентрации энергии в момент формирования экстремальных поверхностных волн – волн-убийц. Получены количественные оценки этих процессов. Показано,

что одиночная аномально большая волна может концентрировать в себе энергию, на порядок большую, чем средняя энергия окрестных волн.

Продемонстрирована значительная корреляция между амплитудным критерием волны-убийцы и концентрацией энергии. Это позволяет по-новому взглянуть на определение волны-убийцы.

Авторы выражают благодарность профессору Е.Н. Пелиновскому за полезные обсуждения результатов статьи. Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (договор # 11.G34.31.0035 от 25 ноября 2010 г. между Минобрнауки РФ, НГУ и ведущим ученым).

1. C. Kharif, E. Pelinovsky, and A. Slunyaev, *Rogue Waves in the Ocean*, Springer (2009), 216 p.
2. I. Nikolkina and I. Didenkulova, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* **11**, 2913 (2011).
3. K. L. Henderson, D. H. Pelegrine, and J. W. Dold, *Wave Motion* **29**, 341 (1999).
4. W. J. D. Bateman, C. Swan, and P. H. Taylor, *J. Comput. Physics* **174**, 277 (2001).
5. A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, *Письма в ЖЭТФ* **88**(5), 356 (2008).
6. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and R. V. Shamin, *Eur. Phys. J.: Special Topics* **185**(1), 113 (2010).
7. D. Chalikov, *Phys. Fluids*. **21**(7), 076602-1 (2009).
8. Р. В. Шамин, А. В. Юдин, *ДАН* **448**(5), 592 (2013).
9. В. Е. Захаров, Р. В. Шамин, *Письма в ЖЭТФ* **91**(2), 68 (2010).
10. В. Е. Захаров, Р. В. Шамин, *Письма в ЖЭТФ* **96**(1), 68 (2012).
11. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Vasilyev, *Eur. J. Mech. B Fluids* **21**, 283 (2002).
12. R. V. Shamin, *J. Math. Sci.* **160**(5), 537 (2009).
13. Р. В. Шамин, *ДАН* **406**(5), 112 (2006).
14. Р. В. Шамин, *Сиб. жур. вычисл. матем.* **9**(4), 379 (2006).