Письма в ЖЭТФ, том 79, вып. 2, с. 75 – 79 © 2004 г. 25 января

Обобщенные темные состояния в системе "бозе-атомы и квантованное поле"

А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин[+]

Новосибирский государственный университет[1]*, Новосибирск 630090, Россия*

[+]*Институт лазерной физики Сибирского отделения РАН*[2]*, Новосибирск 630090, Россия*

Поступила в редакцию 23 декабря 2003 г.

Представлены три новых класса темных состояний, описывающих эффект когерентного пленения населенностей в квантовой системе, резонансно взаимодействующих бозе-атомов и электромагнитного поля.

PACS: 32.80.Qk, 42.50.–p

1. Явление когерентного пленения населенностей (КПН) атомов при взаимодействии с резонансным внешним полем хорошо известно (см. обзор [1] и цитированную там литературу) и находит широкое применение в различных областях атомной и лазерной физики, таких как: спектроскопия сверхвысокого разрешения [2], нелинейная оптика резонансных сред [3, 4], лазерное охлаждение [5], атомная оптика и интерферометрия [6]. В случае резонансного возбуждения атомов из вырожденного по проекции углового момента основного состояния общие условия возникновения КПН и явный вид темных, не рассеивающих свет, состояний были установлены в наших работах [7]. При этом внешнее поле предполагалось когерентным, а состояние атома задавалось c-числовыми амплитудами разложения волновой функции по базису магнитных подуровней.

В работе [8] было показано, что флуктуации лазерных полей определенного вида разрушают темное состояние и эффект КПН пропадает. Это правило, однако, не является общим. Так, нами было обнаружено [9], что темные состояния могут возникать при взаимодействии с *монохроматическим* произвольно флуктуирующим полем излучения. В частности, было показано, что для атома с моментами основного, $J_g = 1$, и возбужденного, $J_e = 1$, состояний эффект КПН имеет место даже в случае полного отсутствия спиновой когерентности фотонов (неполяризованный свет).

Недавние замечательные теоретические работы по проблеме темного поляритона [10, 11] и экспериментальная демонстрация сохранения информации, переносимой светом, в атомной среде [12] возобновили наш интерес к вопросу о наиболее общей форме темного состояния в системе атомы+поле. Следует отметить, что экспериментальные результаты [12] представляются чрезвычайно важными ввиду возможного их распространения на сохранение существенно квантовой информации, кодированной в неклассических состояниях электромагнитного поля. В связи с этим вполне уместной представляется следующая постановка задачи: что изменится в условиях существования и форме темных состояний [7], если резонансное поле описывается не c-числовыми амплитудами, а операторами рождения и уничтожения? С этой точки зрения темные поляритоны [11] должны представлять собой частный случай общего решения, когда одна поляризационная мода поля является классической (то есть находится в когерентном состоянии), а вторая – квантованной. Кроме того, вполне возможно, что для длительного хранения квантовой информации в атомной среде окажется необходимым использование сверххолодных атомных ансамблей – конденсатов Бозе-Эйнштейна [13]. В этом случае атомы также удобно описывать вторично квантованными амплитудами – операторами рождения и уничтожения бозевского типа [14].

Не претендуя на решение поставленной задачи в общем виде, в настоящей работе мы представляем три новых класса темных состояний в системе "бозе-атомы+квантованное поле".

2. Рассмотрим резонансное взаимодействие ансамбля бозе-атомов, имеющих два вырожденных энергетических уровня с полными угловыми моментами J_g в основном и J_e в возбужденном состояниях, с квантованной модой монохроматического электромагнитного поля. Пространственное распределение поля в моде предполагается не зависящим от его

[1]e-mail: llf@admin.nsu.ru
[2]e-mail: llf@laser.nsc.ru

поляризации (например, плоская бегущая волна), то есть оператор напряженности можно записать в виде

$$\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r})\widehat{\mathbf{a}} + \text{h.c.}; \quad \widehat{\mathbf{a}} = \sum_{s=\pm 1} \widehat{a}_s \mathbf{e}_s \ , \tag{1}$$

где $\varphi(\mathbf{r})$ задает распределение поля в моде; $\widehat{a}_s$ – оператор уничтожения фотона в моде с поляризацией $\mathbf{e}_s$: $\left[\widehat{a}_s, \widehat{a}^{\dagger}_{s'}\right] = \delta_{ss'}$.

Атомы будем описывать в рамках метода вторичного квантования бозевскими операторами рождения, $\widehat{b}^{\dagger}_{J_n\mu_n}(p_n)$, и уничтожения, $\widehat{b}_{J_n\mu_n}(p_n)$, атома в состоянии с энергией $E_n(p_n)$, угловым моментом J_n и проекцией момента μ_n, где индекс $n = e, g$. Так же, как и в случае поля предполагается, что волновые функции $\psi_{p_n}(\mathbf{r})$, описывающие пространственное распределение амплитуды вероятности в стационарном состоянии с энергией $E_n(p_n)$, не зависят от проекции момента μ_n. Таким образом, речь здесь идет, например, об атомах в свободном пространстве (в этом случае p_n соответствует импульсу атома) или об атомах в изотропном нерезонансном оптическом потенциале (здесь квантовые числа p_n нумеруют энергетические уровни), но не об атомах в магнитной ловушке.

Возбужденное состояние атомов является радиационно нестабильным вследствие взаимодействия с вакуумными модами поля. Задача заключается в отыскании нетривиальной суперпозиции, описывающей атомы в основном состоянии и возбуждения моды поля, которая обращает в нуль оператор резонансного взаимодействия с полем (1) в любой момент времени t. Формально эти условия можно записать так:

$$\widehat{\mathcal{N}}_e|NC\rangle = 0, \quad \widehat{H}_{A-F}|NC\rangle = 0, \tag{2}$$

то есть темное состояние является одновременным собственным вектором с нулевыми собственными значениями двух операторов: оператора числа атомов в возбужденном состоянии

$$\widehat{\mathcal{N}}_e = \sum_{p_e,\mu_e} \widehat{b}^{\dagger}_{J_e\mu_e}(p_e)\widehat{b}_{J_e\mu_e}(p_e) \tag{3}$$

и оператора резонансного взаимодействия в картине Дирака

$$\widehat{H}_{A-F}(t) = \\ = \sum_{p_e,p_g} \exp\{-i\omega t + i[E_e(p_e) - E_g(p_g)]t/\hbar\} R(p_e,p_g) \times \\ \langle J_e||d||J_g\rangle \sum_{\mu_g,\mu_e,s} C^{J_e\mu_e}_{J_g\mu_g 1 s} \widehat{b}^{\dagger}_{J_e\mu_e}(p_e)\widehat{a}_s\widehat{b}_{J_g\mu_g}(p_g) + \text{h.c.} \tag{4}$$

Здесь интеграл перекрытия $R(p_e,p_g) = \int \psi^{*}_{p_e}(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})\psi_{p_g}(\mathbf{r})d^3r$ описывает эффект отдачи при поглощении фотона; $\langle J_e||d||J_g\rangle$ – приведенный матричный элемент оператора дипольного момента; $C^{J_e\mu_e}_{J_g\mu_g 1\mu}$ – коэффициенты Клебша–Гордана [15].

Для более компактного инвариантного представления результатов удобно отказаться (на время) от условия поперечности фотонов, то есть распространяя суммирование по поляризациям на три компоненты ($\mu = 0, \pm 1$) и опуская, для краткости, индексы p_e и p_g, перейти к рассмотрению эффективного спинового гамильтониана:

$$\widehat{H}_{A-F} = \hbar\kappa \sum_{(\mu)} C^{J_e\mu_e}_{J_g\mu_g 1\mu} \widehat{b}^{\dagger}_{J_e\mu_e}\widehat{a}_{\mu}\widehat{b}_{J_g\mu_g} + \text{h.c.}, \tag{5}$$

где κ – эффективная константа связи ("однофотонная" частота Раби). При этом надо иметь в виду, что полученные ниже решения задачи (2) не зависят от p_e и имеют одинаковую форму при любом значении p_g (то есть они неселективны по поступательным степеням свободы). Следует отметить, что спиновая модель, соответствующая гамильтониану (5), имеет также и самостоятельное значение, в частности, она изоморфна в резонансном приближении некоторым моделям взаимодействия невырожденных n-уровневых атомных систем с многочастотным полем излучения.

3. Итак, мы ищем обобщенные темные состояния – нетривиальные решения задачи (2) с гамильтонианом взаимодействия (5). Первый класс таких состояний реализуется на переходах $J \to J$ (J – целое) и $J \to J-1$ и является непосредственным обобщением темных состояний в классическом внешнем поле [7]. Для его описания введем в рассмотрение оператор рождения атома в темном состоянии:

$$\widehat{\Psi}^{\dagger}_{NC} = \sum_{\mu_g} \widehat{\psi}_{J_g\mu_g}(\widehat{\mathbf{a}})\widehat{b}^{\dagger}_{J_g\mu_g}, \tag{6}$$

где операторные коэффициенты $\widehat{\psi}_{J_g\mu_g}(\widehat{\mathbf{a}})$ (компоненты неприводимого тензора ранга J_g) являются решениями системы уравнений

$$\left\{\widehat{\psi}_{J_g}(\widehat{\mathbf{a}}) \otimes \widehat{\mathbf{a}}\right\}_{J_e\mu_e} = 0. \tag{7}$$

Здесь используется стандартное обозначение книги [15] для неприводимого тензорного произведения. Система уравнений (7) не содержит некоммутирующих операторов, поэтому ее решения могут быть найдены методами, развитыми в [7]. Для указанных выше двух типов переходов нетривиальные решения существуют в виде однородных полиномов по операторам уничтожения фотонов $\widehat{\mathbf{a}}$. А именно, для переходов $J \to J$ (J – целое) имеем решение в виде полинома (минимальной) степени J:

$$\widehat{\psi}_J = \{\widehat{\mathbf{a}}\}_J\,; \quad \{\widehat{\mathbf{a}}\}_L = \left\{\widehat{\mathbf{a}} \otimes \{\widehat{\mathbf{a}}\}_{L-1}\right\}_L\,; \quad \{\widehat{\mathbf{a}}\}_1 \equiv \widehat{\mathbf{a}}. \tag{8}$$

Для переходов $J \to J-1$ минимальная степень полинома равна $(2J-1)$ (мы полагаем, что в общем случае все три компоненты оператора $\widehat{\mathbf{a}}$ отличны от нуля). Решение имеет вид суперпозиции:

$$\widehat{\psi}_J = \sum_{L=0(1)}^{2J-1} A_L (\widehat{\mathbf{a}}\cdot\widehat{\mathbf{a}})^{(2J-1-L)/2} \left\{Q_J \otimes \{\widehat{\mathbf{a}}\}_L\right\}_J\,, \tag{9}$$

где суммирование ведется по четным (нечетным) L в зависимости от J – полуцелое (целое)[3]; Q_J – произвольный c-числовой неприводимый тензор ранга J, а коэффициенты

$$A_L = (\sqrt{2})^L \frac{(2L+1)!!}{\sqrt{(2L)!}} \sqrt{\frac{(2J)!(2J+1)!}{(2J-L)!(2J+L+1)!}}.$$

Полиномы (9) образуют двумерное линейное пространство в следующем смысле: два линейно независимых тензора $Q_J^{(1)}$ и $Q_J^{(2)}$ дают два линейно независимых решения $\widehat{\psi}_J^{(1)}$ и $\widehat{\psi}_J^{(2)}$; любые три решения $\widehat{\psi}_J^{(1)}$, $\widehat{\psi}_J^{(2)}$ и $\widehat{\psi}_J^{(3)}$ – линейно зависимы. Это обстоятельство является непосредственным отражением того факта, что для переходов $J \to J-1$ подпространство темных состояний в классическом поле двумерно [7].

Базисное состояние первого класса параметризуется двумя произвольными функциями f и F:

$$|NC(f,F)\rangle = f(\widehat{\Psi}^\dagger_{NC}) F(\widehat{\mathbf{a}}^\dagger)|\mathrm{vac}\rangle, \tag{10}$$

где $|\mathrm{vac}\rangle$ – вакуумное состояние, не содержащее атомов и фотонов. Непосредственной подстановкой можно убедится, что (10) является решением поставленной задачи (2), если $\widehat{\psi}_{J_g}$ удовлетворяет (7). Отметим, что условие поперечности фотонов будет автоматически выполнено, если функция F зависит только от $\widehat{a}_{-1}$ и $\widehat{a}_{+1}$. Очевидно, что любая суперпозиция и некогерентная смесь состояний (10) также являются решением задачи (2), то есть являются темными состояниями.

В качестве простейшего примера проследим, как возникает однократно возбужденное состояние темного поляритона [11] в рамках нашего подхода. Рассмотрим переход $1 \to 1$, то есть $\widehat{\Psi}_{NC} = \widehat{a}_{+1}\widehat{b}^\dagger_{+1} + \widehat{a}_0\widehat{b}^\dagger_0 + \widehat{a}_{-1}\widehat{b}^\dagger_{-1}$. Функцию $F(\widehat{\mathbf{a}})$ зададим в виде $F = \exp[-|z|^2/2 + z\widehat{a}^\dagger_{+1}]\widehat{a}^\dagger_{-1}$. При действии на вакуумное состояние F генерирует когерентное состояние амплитуды z в моде с круговой поляризацией $(+1)$ и один фотон в моде с круговой поляризацией (-1). Допустим, что число атомов фиксировано и равно N, тогда вид функции f определяется однозначно: $f = (\widehat{\Psi}^\dagger_{NC})^N/\sqrt{N!}$. Непосредственные вычисления по формуле (10) приводят к результату, совпадающему с точностью до обозначений с $|D,1\rangle$ в [11]:

$$|NC\rangle = (z|\{N\}^{(a)}_{+1}, \{0\}^{(a)}_{-1}, \{1\}^{(ph)}_{-1}\rangle +$$
$$+\sqrt{N}|\{N-1\}^{(a)}_{+1}, \{1\}^{(a)}_{-1}, \{0\}^{(ph)}_{-1}\rangle)/\sqrt{|z|^2+N},$$

где указаны только те числа заполнения, которые меняются в процессе взаимодействия, $\{N\}^{(a)}_{+1}$ означает N атомов в состоянии $|J_g, \mu_g = +1\rangle$ и т.д. Выбор $F = \exp[-|z|^2/2 + z\widehat{a}^\dagger_{+1}](\widehat{a}^\dagger_{-1})^m/\sqrt{m!}$ приводит к m-кратно возбужденным состояниям темного поляритона $|D,m\rangle$ [11].

4. Из (5) видна определенная симметрия между полем и атомами. Действительно, речь идет о связывании двух спинорных бозе-полей ранга J_g и 1 в спинорное бозе-поле ранга J_e. Физическая природа связываемых полей в рамках модели до некоторой степени не важна. Эти соображения приводят ко второму классу темных состояний. Соответствующие алгебраические конструкции подобны рассмотренным выше с заменой местами атомов в основном состоянии и фотонов. Введем в рассмотрение оператор рождения фотона в темном состоянии:

$$\widehat{A}^\dagger_{NC} = \sum_s \widehat{w}_s(\widehat{b}_{J_g})\widehat{a}^\dagger_s. \tag{11}$$

Здесь операторные коэффициенты $\widehat{w}_s(\widehat{b}_{J_g})$ (компоненты вектора $\widehat{\mathbf{w}}$) удовлетворяют системе уравнений

$$\left\{\widehat{\mathbf{w}}(\widehat{b}_{J_g}) \otimes \widehat{b}_{J_g}\right\}_{J_e\mu_e} = 0, \tag{12}$$

нетривиальные решения которой существуют, если $J_e < 1$ и при $J_g = J_e = 1$, то есть всего для четырех переходов. Приведем явный вид этих решений. Для переходов $1 \to 0$ и $1 \to 1$ вектор $\widehat{\mathbf{w}}$ линеен по отношению к вектору $\widehat{\mathbf{b}} \equiv \widehat{b}_{J_g=1}$:

$$\widehat{\mathbf{w}} = \mathbf{c} \times \widehat{\mathbf{b}}\ (J_e = 0); \quad \widehat{\mathbf{w}} = \widehat{\mathbf{b}}\ (J_e = 1), \tag{13}$$

где $\mathbf{c}$ – произвольный c-числовой вектор. В случае переходов $1/2 \to 1/2$ и $3/2 \to 1/2$ зависимость $\widehat{\mathbf{w}}$ от $\widehat{b}_{J_g}$ квадратичная:

$$\widehat{\mathbf{w}} = \{\widehat{b}_{J_g} \otimes \widehat{b}_{J_g}\}_1. \tag{14}$$

[3] Мы здесь не связываем жестко значение углового момента со статистикой атомов, имея в виду различные обстоятельства, в частности, указанную выше изоморфность рассматриваемых спиновых моделей моделям с невырожденными состояниями.

Далее, по аналогии с (10) основной представитель второго класса темных состояний параметризуется произвольными функциями ϕ и Φ:

$$|NC(\phi,\Phi)\rangle = \phi(\widehat{A}_{NC}^{\dagger})\Phi(\widehat{b}_{J_g}^{\dagger})|\mathrm{vac}\rangle. \qquad (15)$$

Следует сказать, что при определенном выборе функций f и F в (10), и функций ϕ и Φ в (15) темные состояния $|NC(f,F)\rangle$ и $|NC(\phi,\Phi)\rangle$ могут совпадать, то есть первый и второй классы пересекаются по некоторому множеству элементов. Однако второй класс содержит также элементы, не входящие в первый. Это обстоятельство наиболее очевидно для перехода $1/2 \to 1/2$, где темных состояний первого класса не существует. Рассмотрим этот случай более подробно. Функцию Φ зададим в виде $\Phi = \exp[-|z_+|^2/2 + z_+\widehat{b}_{+1/2}^{\dagger}](\widehat{b}_{-1/2}^{\dagger})^2/\sqrt{2}$, что соответствует бозе-конденсату атомов с проекцией спина $(+1/2)$ (описываемому комплексным параметром порядка z_+) и двум атомам с противоположной проекцией. Функцию ϕ для простоты выберем линейной: $\phi = \widehat{A}_{NC}^{\dagger} = (\widehat{b}_{+1/2})^2\widehat{a}_{+1}^{\dagger} + \sqrt{2}\widehat{b}_{+1/2}\widehat{b}_{-1/2}\widehat{a}_0^{\dagger} + (\widehat{b}_{-1/2})^2\widehat{a}_{-1}^{\dagger}$. В результате получим темное состояние в виде суперпозиции:

$$|NC\rangle = (z_+)^2|\{2\}_{-1/2}^{(a)},\{1\}_{+1}^{(ph)}\rangle +$$
$$+2z_+|\{1\}_{-1/2}^{(a)},\{1\}_{0}^{(ph)}\rangle + \sqrt{2}|\{0\}_{-1/2}^{(a)},\{1\}_{-1}^{(ph)}\rangle,$$

коэффициенты которой контролируются параметром z_+. Такие состояния описывают существенно квантовые корреляции (entanglement) между двумя подсистемами (атомы и поле) [16]. В рассматриваемом случае квантовая "запутанность" оказывается дополнительным ресурсом, приводящим к нетривиальным темным состояниям.

Если вернуться к исходной постановке задачи с заданным пространственным распределением поля (1), то данная суперпозиция фотонов во всех трех поляризационных состояниях, вообще говоря, противоречит условию поперечности электромагнитных волн. Такой проблемы, однако, не возникает при рассмотрении невырожденной четырехуровневой модели атома, взаимодействующего с трехчастотным полем. В этом случае операторы $\widehat{a}_{0,\pm1}^{\dagger}$ рождают фотоны с различными частотами (ω_0 и $\omega_0 \pm \Omega$).

5. Из общих соображений не очевидно, что первым и вторым классами исчерпываются всевозможные темные состояния в нашей системе, что мотивирует поиск темных состояний, отличных от рассмотренных выше. Будем искать такие состояния в виде

$$|NC\rangle = X(\widehat{b}_{J_g}^{\dagger},\mathbf{a}^{\dagger})|\mathrm{vac}\rangle. \qquad (16)$$

Предположим к тому же, что число атомов N и число фотонов m заданы, тогда

$$X = \sum_{(\mu),(s)} \mathcal{X}_{\mu_1,\ldots,\mu_N;s_1,\ldots,s_m}\widehat{b}_{J_g\mu_1}^{\dagger}\ldots\widehat{b}_{J_g\mu_N}^{\dagger}\widehat{a}_{s_1}^{\dagger}\ldots\widehat{a}_{s_m}^{\dagger}, \qquad (17)$$

где коэффициенты $\mathcal{X}_{(\mu),(s)}$ симметричны относительно перестановки любой пары индексов $\mu_i \leftrightarrow \mu_j$, и $s_k \leftrightarrow s_l$. Кроме того, в силу (2), коэффициенты $\mathcal{X}_{(\mu),(s)}$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\sum_{(\mu),(s)} C_{J_g\mu_1 1 s_1}^{J_e\mu_e}\mathcal{X}_{\mu_1,\ldots,\mu_N;s_1,\ldots,s_m} \times$$
$$\times\widehat{b}_{J_g\mu_2}^{\dagger}\ldots\widehat{b}_{J_g\mu_N}^{\dagger}\widehat{a}_{s_2}^{\dagger}\ldots\widehat{a}_{s_m}^{\dagger} = 0. \qquad (18)$$

Подчеркнем, что c-числовые коэффициенты $\mathcal{X}_{(\mu),(s)}$ должны обратить (18) в операторные тождества.

Очевидно, что представители первого и второго классов темных состояний могут иметь форму (16), (17) при соответствующем выборе функций (f,F) или (ϕ,Φ). Чтобы убедится в том, что форма (16), (17) описывает сверх того темные состояния, не принадлежащие первому или второму классам, рассмотрим яркие переходы $J \to J+1$, где темных состояний первых двух классов не существует. Подсчет числа неизвестных коэффициентов $\mathcal{X}_{(\mu),(s)}$ и числа линейных уравнений на эти коэффициенты показывает, что нетривиальные решения поставленной задачи заведомо существуют при $\{N=1, J+1>m\}$ и $\{N=2, m=1, J>0\}$. Поскольку число атомов и фотонов во всех случаях весьма ограничено, мы называем темные состояния третьего класса "ультраквантовыми".

Конкретизируем структуру этих состояний. В случае $N=1, J+1>m$ темное состояние третьего класса можно записать в виде

$$|NC\rangle = \left(Q_L\cdot\left\{\widehat{b}_{J_g}^{\dagger}\otimes\{\widehat{\mathbf{a}}^{\dagger}\}_m\right\}_L\right)|\mathrm{vac}\rangle, \qquad (19)$$

где Q_L – произвольный тензор ранга $L=J-m+1$ или $L=J-m$, полное число компонент этих двух тензоров соответствует $4(J+1-m)$ линейно независимым решениям. Отметим, что выбором линейной комбинации состояний (19) можно удовлетворить (при $J\geq m$) условию поперечности поляризации фотонов. Число линейно независимых решений в этом случае равно $(2J+1-2m)$. В качестве примера возьмем переход $1\to 2$, $m=1$, $L=1$ и $Q_1=\mathbf{e}_0$ (один из циклических ортов), тогда

$$|NC\rangle = \frac{|\{1\}_{+1}^{(a)},\{1\}_{-1}^{(ph)}\rangle - |\{1\}_{-1}^{(a)},\{1\}_{+1}^{(ph)}\rangle}{\sqrt{2}}.$$

В случае $N = 2, m = 1, J > 0$ число линейно независимых состояний третьего класса равно $J(2J+1)$. Приведем только один пример – переход $1/2 \to 3/2$, когда решение единственно:

$$|NC\rangle = \left(\left\{\widehat{b}^{\dagger}_{J_g} \otimes \widehat{b}^{\dagger}_{J_g}\right\}_1 \cdot \widehat{\mathbf{a}}^{\dagger}\right)|\text{vac}\rangle. \quad (20)$$

6. Таким образом, представленные в настоящей работе результаты существенно расширяют семейство темных состояний, описывающих эффект КПН в квантовой системе резонансно связанных атомов и поля, что имеет фундаментальное значение для квантовой оптики. Кроме того, полученные результаты могут оказаться полезными при постановке экспериментов с атомными бозе-конденсатами во внешних полях, в том числе, и в области квантовой информатики.

Темные состояния всех трех классов найдены нами также в случае ансамбля различимых атомов и для ансамбля фермионов. Соответствующие результаты будут опубликованы.

Работа выполнена при поддержке грантов INTAS # 01-0855 и Российского фонда фундаментальных исследований # 04-02-16428, # 04-02-16488 и # 04-02-16525.

1. E. Arimondo, in *Progress in Optics*, Ed. E. Wolf, **XXXV**, 257 (1996).
2. P. R. Hemmer, S. Ezekiel, C. C. Leiby, Jr., Opt. Lett. **8**, 440 (1983); A. Akulshin, A. Celikov, and V. Velichansky, Opt. Commun. **84**, 139 (1991); M. O. Scully and M. Fleischhauer, Phys. Rev. Lett. **69**, 1360 (1992); J. Kitching, S. Knappe et al., IEEE Trans. Instrum. Meas. **49**, 1313 (2000); M. Stahler, S. Knappe et al., Europhys. Lett. **53**, 323 (2001).
3. S. E. Harris, Physics Today **50**(7), 36 (1997).
4. O. Kocharovskaya, Phys. Rep. **129**, 175 (1992); M. O. Scully, Phys. Rep. **129**, 191 (1992).
5. A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser et al., Phys. Rev. Lett. **61**, 826 (1988); A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser et al., J. Opt. Soc. Amer. **B6**, 2112 (1989).
6. P. Marte, P. Zoller, and J. L. Hall, Phys. Rev. **A44**, 4118 (1991); M. Weitz, B. C. Young, and S. Chu, Phys. Rev. Lett. **73**, 2563 (1994); P. D. Featonby, G. S. Summy et al., Phys. Rev. Lett. **81**, 495 (1998).
7. В. С. Смирнов, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, ЖЭТФ **96**, 1613 (1989); А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, ЖЭТФ **98**, 81 (1990); A. V. Taichenachev, A. M. Tumaikin, and V. I. Yudin, Europhys. Lett. **45**, 301 (1999); А. В. Тайченачев, А. М. Тумайкин, В. И. Юдин, ЖЭТФ **118**, 77 (2000).
8. B. J. Dalton and P. L. Knight, J. Phys. **B15**, 3997 (1982).
9. A. V. Taichenachev, A. M. Tumaikin, and V. I. Yudin, Laser Physics **4**, 124 (1994).
10. И. Е. Мазец, Б. Г. Матисов, Письма в ЖЭТФ **64**, 483 (1996).
11. M. Fleschauer and M. D. Lukin, Phys. Rev. Lett. **84**, 5094 (2000); M. Fleschauer and M. D. Lukin, Phys. Rev. **A65**, 022314 (2002).
12. C. Liu, Z. Dutton et al., Nature **409**, 490 (2001); D. F. Phillips, A. Fleischhauer et al., Phys. Rev. Lett. **86**, 783 (2001); A. S. Zibrov, A. B. Matsko et al., Phys. Rev. Lett. **88**, 103601 (2002).
13. E. Cornell, Nature **409**, 461 (2001).
14. G. Juzeliunas and H. J. Carmichael, Phys. Rev. **A65**, 021601(R) (2002).
15. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Ленинград: Наука, 1975.
16. И. В. Багратин, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, УФН **171**, 625 (2001).