

АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ И КОЛЕБАНИЙ В НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СИСТЕМАХ

Ф.С.Джепаров, В.Е.Шестопал

Институт теоретической и экспериментальной физики

117259 Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 июня 1994 г.

Предложены новые (в том числе и многомерные) асимптотически (при больших временах) точно решаемые (АТР) модели случайных блужданий и колебаний в неупорядоченных средах. Детально рассмотрены одномерные случайные блуждания с нетривиальной элементарной ячейкой и двумерные колебания в простой двумерной решетке. Сформулирован общий метод построения подобных моделей.

1. Теория случайных блужданий в неупорядоченных средах (СБНС) имеет общезначимое значение благодаря широким приложениям в различных областях естествознания и глубоким связям с общими проблемами статистической физики и теории поля (см., например, недавние работы [1-8] и представленную в них литературу). Центральная проблема СБНС состоит в построении $P_{xy}(t) = \langle \tilde{P}_{xy}(t) \rangle$ - решения кинетического уравнения

$$d\tilde{P}_{xy}(t)/dt = - \sum_z [\tilde{w}_{zx} \tilde{P}_{xy}(t) - \tilde{w}_{xz} \tilde{P}_{zy}(t)], \quad \tilde{P}_{xy}(0) = \delta_{xy}, \quad (1)$$

усредненного по случайному распределению скоростей переходов \tilde{w}_{xz} . Здесь $\tilde{P}_{xy}(t)$ - условная вероятность обнаружить возбуждение в момент t в узле решетки x , если при $t=0$ оно было в y .

К основным достижениям теории СБНС можно отнести прогресс в исследовании асимптотики больших времен в одномерных системах [1], последовавший за пионерскими работами [9,10]. Точных результатов о многомерных задачах много меньше, а надежные расчеты коэффициентов диффузии для систем с немалыми флуктуациями скоростей \tilde{w}_{xz} есть лишь для модели изотропных случайных прыжков (МИСП) [11] (модели случайных ловушек) и ее модификаций [6,8]. В этой модели проанализированы и предасимптотические процессы [8].

Теория колебаний в неупорядоченных средах (КНС) во многом близка теории СБНС в тех случаях, когда наблюдаемыми являются асимптотики больших времен или низких частот пропагатора, либо низкоэнергетическое поведение плотности состояний [1,12]. Здесь аналог МИСП - задача со случайными массами. Асимптотически точно решаемые (АТР) многомерные модели КНС со случайными силами ранее в литературе, по-видимому, не рассматривались.

В настоящей работе предложены новые АТР модели. В одномерном случае они значительно богаче известных ранее [1,6,8,9,11] по структуре элементарных переходов. В многомерном случае мы впервые предлагаем АТР модели векторных колебаний со случайными силовыми матрицами. Существенно, что новые модели допускают естественные свойства симметрии в распределении параметров среды.

2. Рассмотрим симметричные случайные блуждания на целочисленной прямой Z , разбитой на ячейки длиной N . Пусть n - номер ячейки, ν - номер узла в ячейке, а ненулевые $\tilde{w}_{xz} = \tilde{w}_{zx}$ имеют вид $\tilde{w}_{Nn+\nu-1, Nn+\nu} = \xi_n^\nu$, $\nu = 1 \div N$, $\tilde{w}_{Nn-N, Nn} = \xi_n$. Вводя $\tilde{P}_{mn}^{\mu\nu}(t) = \tilde{P}_{Nm+\mu, Nn+\nu}(t)$, имеем:

$$d\tilde{P}/dt = -B\xi C\tilde{P}, \quad \tilde{P}_{mn}^{\mu\nu}(t=0) = \delta_{\mu\nu}\delta_{mn},$$

$$B_{mn}^{\mu\nu} = (\delta_{\mu\nu} - \delta_{\mu+1, \nu})\delta_{mn} + \delta_{\mu N}\delta_{\nu 1}(\delta_{mn} - \delta_{m+1, n}), \quad C = B^+, \quad (2)$$

$$\xi_{mn}^{\mu\nu} = \delta_{mn}(\hat{\xi}_m)^{\mu\nu} = \delta_{mn}\xi_m^{\mu\nu} = \delta_{mn}(\xi_m^\mu\delta_{\mu\nu} + \xi_m),$$

где $\delta_{\mu+N, \nu} = \delta_{\mu\nu}$. Предполагается, что случайные матрицы $\hat{\xi}_m$ имеют одинаковые и независимые от m распределения, и что существует обратный момент $\langle (\hat{\xi}_m)^{-2J} \rangle$, $J > 1$. Применяя технику из [8], вполне допустимую при матрично-значных $\hat{\xi}_m$, получим разложение лаплас-образа пропагатора $\tilde{P}(\lambda) = \int_0^{+\infty} dt \tilde{P}(t) \exp(-\lambda t)$,

$$\tilde{P}(\lambda) = (\lambda + B\xi C)^{-1} = \lambda^{-1}[1 - B\xi(\lambda + CB\xi)^{-1}C],$$

$$\xi(\lambda + CB\xi)^{-1} = (\lambda/\xi + CB)^{-1} = \sum_{j=1}^J (G\lambda\eta)^j G + (G\lambda\eta)^{J+1}(\lambda/\xi + CB)^{-1}, \quad (3)$$

$$G = (\lambda/\kappa + CB)^{-1}, \quad \eta = \kappa^{-1} - \xi^{-1}, \quad \kappa^{-1} = \langle \xi^{-1} \rangle.$$

Усредняя сумму (3) почленно и разлагая каждый ее член в асимптотический ряд при малых λ , получим искомое разложение среднего пропагатора. В главном порядке при $\lambda \rightarrow 0$, $\text{Re}(\lambda) > 0$

$$\langle \tilde{P}(\lambda) \rangle \cong (\lambda + B\kappa C)^{-1}, \quad (4)$$

что влечет диффузионную асимптотику больших t [8].

3. Еще одна простая и содержательная одномерная модель получается по той же схеме на основе уравнения (2), если положить $B = 1 - T$, где $(Tf)_x = f_{x+1}$, и принять, что $\xi_{mn}^{\mu\nu} = \delta_{mn}\xi_m^{\mu\nu}$, ограничив случайные матрицы $\xi_m^{\mu\nu}$ только условиями неотрицательности скоростей переходов \tilde{w}_{xz} , существованием первых $2J$ обратных моментов, а также трансляционной инвариантностью и независимостью распределений ξ_m в разных ячейках. В этом случае получается более богатая система связей, в которой разрешены все переходы внутри звена, образованного элементарной ячейкой и первым узлом ближайшей справа ячейки.

4. Третья система описывает двумерные колебания в неупорядоченной среде. Пусть "молекулы" единичной массы расположены в узлах $x = (x_1, x_2)$ решетки Z^2 с четной суммой координат $x_1 + x_2$ и каждая из них взаимодействует с двумя ближайшими координационными сферами из той же подрешетки таким образом, что смещения u_x^i удовлетворяют уравнениям

$$d^2 u/dt^2 = -\Phi\xi\Phi^+ u, \quad u(t=0) = v, \quad du(t=0)/dt = w,$$

$$u_x = (u_x^1, u_x^2), \quad \Phi_{xy}^{1n} = a_n \nabla_{xy}^1 - \sigma b_n \nabla_{xy}^2, \quad \Phi_{xy}^{2n} = b_n \nabla_{xy}^1 + \sigma a_n \nabla_{xy}^2, \quad \sigma^2 = 1, \quad (5)$$

$$\nabla_{xy}^j = \delta_{x+e_j, y} - \delta_{x-e_j, y}, \quad e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1), \quad (\xi)_{xy} = \xi_x \delta_{xy};$$

здесь $m, n = 1 \div 2$, a и b - действительные векторы, ξ_x - независимые при разных x , одинаково распределенные, положительно определенные, вещественные, симметричные 2×2 -матрицы, определенные в узлах с нечетной суммой координат $x_1 + x_2$. Силовая матрица $\Omega_{xz}^{mn} = (\Phi \xi \Phi^+)_{xz}^{mn}$ связывает каждый узел x с восемью ближайшими узлами той же подрешетки. Импульс сохраняется: $\sum_x \Omega_{xz}^{mn} = 0$. В главном порядке по числу $N \rightarrow \infty$ узлов в подрешетке и при взаимодействии каждого узла с теми же ближайшими соседями симметричная матрица Ω могла бы иметь $17N$ независимых элементов. В нашей модели их $3N$ - число величин ξ_x^{mn} .

Легко проверить, что распределение $\Phi \xi \Phi^+$ инвариантно к трансляциям и повороту на $\pi/2$ плоскости решетки:

$$x \rightarrow sx, \quad u \rightarrow su \quad (se_1 = e_2, \quad se_2 = -e_1). \quad (6)$$

Если же распределения ξ_x и $s\xi_x s^+$ одинаковы, то при $\sigma = 1$, $a_1 = a_2$ и $b_1 = -b_2$ распределение $\Phi \xi \Phi^+$ инвариантно к отражениям относительно осей (при этом $ab = 0$).

При наличии средних $\langle (\xi_m)^{-2J} \rangle$, $J > 1$, асимптотика усредненного решения (5) строится по той же схеме, что и для (2), с заменой λ на λ^2 , B на Φ , C на Φ^+ , и с учетом другой формы начальных условий.

Если распределение ξ инвариантно к (6), то $\langle \xi_x^{-1} \rangle = 1/\kappa$ - скалярная матрица, и в главном порядке при $\lambda \rightarrow 0$, $\text{Re} \lambda > 0$

$$\langle u(\lambda) \rangle \cong (\lambda^2 - \kappa H)^{-1}(v + \lambda w), \quad H = H_1 + H_2,$$

$$H_1^{mn} = b^2 \Delta \delta_{mn} + (a^2 - b^2) \nabla^m \nabla^n \sigma^{m+n}, \quad \Delta = (\nabla^1)^2 + (\nabla^2)^2,$$

$$H_2^{mn} = ab\{(1 - \delta_{mn})[(\nabla^1)^2 - (\nabla^2)^2] + 2\sigma \nabla^1 \nabla^2 \delta_{mn} (-1)^m\}.$$

Оператор H_2 инвариантен к вращениям (6), а H_1 - и к отражениям. В непрерывном пределе (заменяя ∇^i на $\partial/\partial x_i$) при $\sigma = 1$ и $ab = 0$ оператор H $O(2, R)$ -инвариантен. В низкочастотной асимптотике спектр имеет продольную и поперечную звуковые ветви ($\omega_\alpha = c_\alpha k(1 - i(\zeta_\alpha k)^2)$, $\alpha = l, t$), причем затухание полностью определяется следующим (пропорциональным $\langle \eta \lambda^2 (\lambda^2/\kappa + \Phi^+ \Phi)^{-1} \eta \rangle$) членом разложения эффективной силовой матрицы H по флуктуациям $\eta = \kappa^{-1} - \xi^{-1}$ (см. (3)).

5. Системы (2) и (5) являются примерами из обширного класса АТР моделей, которые в случае СБНС имеют вид

$$d\tilde{P}_n^\mu/dt = -(B\xi^1 F^1 \xi^2 \dots F^{M-1} \xi^M C \tilde{P})_{nn}^\mu.$$

Здесь 1) $n \in Z^d$ - "номер" ячейки и μ - номер узла в ячейке, 2) операторы CB, F^1, \dots, F^{M-1} - инвариантны к сдвигам по n , 3) $((F^m)^{-1})_{nn'}^{\mu\mu'} = 0$ при $|n - n'| > R_1$, $m = 1 \div M - 1$, 4) при $\text{Re} \lambda > 0$ оператор $G = (\lambda + CB)^{-1} l_1$ - ограничен и $\lambda G_{nn'}^{\mu\mu'} = o(1)$, если $\lambda \rightarrow 0$ и $\text{Re} \lambda > 0$, 5) $(\xi^m)_{nn'}^{\mu\mu'} = (\xi^m)_{nn'}^{\mu\mu'} \delta_{nn'}$, $m = 1 \div M$, где $(\xi^m)_{nn'}^{\mu\mu'}$ распределены инвариантно к тем же сдвигам и $(\xi^m)_{nn'}^{\mu\mu'}$, и $(\xi^m)_{nn'}^{\nu\nu'}$ независимы при $|n - n'| > R_2$, 6) конечны средние $\langle (\xi^1 F^1 \xi^2 \dots \xi^M)^{-n} \rangle$, $n = 1 \div 2J$, где J достаточно велико, 7) неотрицательны скорости переходов, 8) $\sum_{n,\mu} (B\xi^1 F^1 \xi^2 \dots F^{M-1} \xi^M C)_{nn'}^{\mu\mu'} = 0$, то есть сохраняется полная вероятность.

Допустима случайность начальных параметров. Здесь, почти как в (3), к цели

ведет разложение по флуктуациям операторов $\lambda(\xi^1 F^1 \xi^2 \dots \xi^M)^{-1}$ (доказательство асимптотической сходимости в главных чертах то же, что и в [8]).

Сходным образом конструируются модели колебаний, где также допустима нетривиальная элементарная ячейка, а вместо 7) и 8) требуется симметричность силовой матрицы и выполнение закона сохранения импульса.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 93-02-2170).

-
1. J-Ph.Bouchuad, A.Georges, Phys. Rep. **185**, 127 (1990).
 2. E.Hernández-Garcia, M.A.Rodriguez, L.Pesquera, and M.San-Miguél, Phys. Rev. **B42**, 10653 (1990).
 3. Ю.Г.Абов, М.И.Булгаков, С.П.Боровлев и др., ЖЭТФ **99**, 962 (1991).
 4. Ф.С.Джепаров, ЖЭТФ **99**, 982 (1991).
 5. J.Bricmont and A.Kupiainen, Phys. Rev. Lett. **66**, 1689 (1991).
 6. J.W.Haus and K.W.Kehr, Phys. Rev. **44**, 4341 (1991).
 7. Proc. of 4th Int. Conf. on Hopping and Related Phenomena, Phil. Mag. **B65**, N° 4 (1992).
 8. Ф.С.Джепаров, В.Е.Шестопал, ТМФ **94**, 496 (1993).
 9. J.Bernasconi, S.Alexander, and R.Orbach, Phys. Rev. Lett. **41**, 185 (1978).
 10. Я.Г.Синай, Теор. вероятн. и ее прим. **29**, 247 (1982).
 11. P.J.H.Denteneer and M.H.Ernst, Phys. Rev. **B29**, 1755 (1984).
 12. W.Schirmacher and M.Wagener, Phil. Mag. **B65**, 607 (1992).