

АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ГАЙЗЕНБЕРГА

А.В.Михайлов, А.И.Яремчук

Показано, что аксиально-симметричные решения модели Гайзенберга в двумерном пространстве могут быть описаны методом обратной задачи. Найдены бесконечные серии нелокальных законов сохранения и точных решений. Доказано отсутствие локализованных в пространстве решений.

Уравнение модели Гайзенберга, описывающее движение вектора намагниченности \mathbf{S} в магнитном поле \mathbf{H} , имеет вид

$$\mathbf{S}_t = [\mathbf{S}, \Delta \mathbf{S}] + [\mathbf{H}, \mathbf{S}]. \quad (1)$$

В одномерном случае это уравнение было детально исследовано в работах ^{1,2} методом обратной задачи рассеяния. В случае большего числа пространственных переменных это уравнение по-видимому, не является интегрируемым. Мы покажем, что в двумерном случае в предположении аксиальной симметрии решения к этой модели применим метод обратной задачи, что позволяет описать ее решения с той же полнотой, как и в одномерном случае.

1. Пусть x_1, x_2 — декартовы координаты на плоскости. Мы будем считать, что \mathbf{S} зависит только от t и $x = (x_1^2 + x_2^2) / 4$, при этом уравнение (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} A_t - B_x + [A, B] &= 0, \\ [\sigma_3, B] + 2i(xA)_x &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$A = g_x g^{-1}, B = g_t g^{-1}, 2iS = \vec{\sigma} \mathbf{S} = e^{-\frac{(i/2)tH\sigma_3}{g^{-1}\sigma_3 g e^{\frac{(i/2)tH\sigma_3}{g^{-1}\sigma_3 g e}}}}$$

причем g выбрана так, что $g^+ g = I$, $\text{diag } A = 0$.

Система уравнений (2) является условием совместности двух линейных уравнений на матрицу ψ

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi = (i\lambda\sigma_3 + A) \psi \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = (2i\lambda^2 x \sigma_3 + 2\lambda x A + B) \psi, \quad (4)$$

где $\lambda = -[2(t+u)]^{-1}$, u — спектральный параметр на плоскости \mathcal{C} .

2. Вычислим вначале законы сохранения для уравнения (2). Мы будем предполагать, что $S(x, t_0)$ существенно отличается от $\sigma_3 / 2i$ лишь в ограниченной области с характерным размером R_0 . Фундаментальное решение системы (3), (4) можно представить в виде

$$\psi = g(x, t) \chi(x, t, u) \exp(i\lambda\sigma_3 x), \text{ где } \chi(\infty, t, u) = I.$$

Из (3), (4) следует, что χ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi = -2\lambda S \chi - i\lambda \chi \sigma_3, \quad \frac{\partial}{\partial t} \chi(0, t, u) = 0 \quad (5)$$

и раскладывается в ряд $\chi(x, t, u) = I + \sum_{n>1} \chi_n(x, t) u^{-n}$. Коэффициенты $\chi_n(x, t)$

легко вычисляются и при $x = 0$ не зависят от времени. Первые два интеграла $I_n = \chi_n(0, t)$ имеют вид

$$I_1 = \int_0^{\infty} (S(x, t) - \sigma_3/2i) dx \quad (6)$$

$$I_2 = t I_1 + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dx_1 dx_2 \theta(x_2 - x_1) [S(x_1, t) S(x_2, t) - (S(x_1, t) + S(x_2, t)) \sigma_3/2i - 1/4].$$

Интеграл I_1 имеет смысл магнитного момента. Рассмотрим интеграл

$$J = \text{tr}(I_2 \sigma_3/2i) = (t/2) \int_0^{\infty} (1 - S_3) dx + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dx_1 dx_2 \theta(x_2 - x_1) [S(x_1, t), S(x_2, t)]_3.$$

Первое слагаемое положительно определено и линейно растет со временем, поэтому радиус локализации решения обязан расти со временем, в противном случае второе слагаемое осталось бы ограниченным. Иными словами, не существует решений типа "магнитных капель". Любая локализованная в начальный момент времени флуктуация намагниченности, зависящая только от расстояния до начала координат, расплывается. Разумеется, мы предполагаем интегралы I_1, I_2 сходящимися.

3. Решение задачи Коши сводится к прямой и обратной задачам рассеяния для оператора (3) на полуоси $x > 0$. Мы будем предполагать, что начальные данные $A(x, 0)$ ограничены вместе с производной и интегрируемы ($\int_0^{\infty} |A| dx < \infty$).

Рассмотрим два набора фундаментальных решений Φ_0 и Φ_+ уравнения (3), определенных следующими условиями:

$$\Phi_0(x, t, \lambda)|_{x=0} = I, \quad \Phi_+(x, t, \lambda) \rightarrow \exp(i\lambda\sigma_3 x) \text{ при } x \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Эти решения линейно зависимы

$$\Phi_0(x, t, \lambda) = \Phi_+(x, t, \lambda) T(t, \lambda) \quad (8)$$

и матрица $T(t, \lambda)$ называется матрицей рассеяния. С помощью (4) можно показать что:

$$T(t, \lambda) = T\left(0, \frac{\lambda}{1+2t\lambda}\right) T^{-1}\left(0, \frac{1}{2t}\right). \quad (9)$$

То есть $T(t, \lambda)$ полностью определяется своим значением в нулевой момент времени. Матрица $T(t, \lambda)$ несет всю информацию о потенциале A . Восстановление потенциала $A(x, t)$ может быть сведено к уравнению типа Винера - Хопфа. Разумеется, матрица T и функции Φ_0, Φ_+ обладают некоторыми аналитическими свойствами и специальным асимптотическим поведением, которые мы используем при выводе этого уравнения, но не имеем возможности привести здесь. Пусть $\hat{F}(t, \lambda) = T - I, \hat{f} = \Phi_+^* \exp(-i\lambda\sigma_3 x) - I$. Тогда преобразование Фурье

$$F(t, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\sigma_3\xi} \hat{F}(t, \lambda) \frac{d\lambda}{2\pi}, \quad f(x, t, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x, t, \lambda) e^{-i\lambda\sigma_3\xi} \frac{d\lambda}{2\pi} \quad (10)$$

обрывается при $\xi < 0$, а при $\xi > 0$ удовлетворяет уравнению

$$f(x, t, \xi) + \int_{\xi}^{\infty} f(x, t, \xi') F_1(t, \xi - \xi') d\xi' + \int_0^{\infty} f(x, t, \xi') F_2(t, 2x + \xi + \xi') d\xi' + F_2(t, 2x + \xi) = 0, \quad (11)$$

где $F_1(t, \xi)$ и $F_2(t, \xi)$ обозначают диагональную и антидиагональную часть матрицы F . Функция $g(x, t)$ восстанавливается по решению этого уравнения

$$g(x, t) = \Phi_+(x, t, \lambda) \Big|_{\lambda=0} = I + \int_0^{\infty} f(x, t, \xi) d\xi. \quad (12)$$

Отметим, что в точке $x = 0$ функция $g(0, t)$ определяется явно по $T(0, \lambda)$ без решения уравнения (11)

$$g(0, t) = T(0, 1/2t) g(0, 0). \quad (13)$$

4. Уравнения (9), (11) дают возможность рассмотреть асимптотическое поведение решений задачи Коши при $|t| \rightarrow \infty$ и фиксированных x . Из (9) следует, что $\hat{F}(t, \lambda) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и

$$F(t, \xi) = t^{-2} \exp(-i\sigma_3 \xi/2t) F_0 + O(t^{-3}), \quad F_0 = \text{const}. \quad (14)$$

Решая (11) в нулевом приближении и подставляя в (12), получим

$$2iS = \sigma_3 + t^{-1} e^{-i\sigma_3 \frac{x}{t} - \frac{i}{2} t H \sigma_3} \left[\sigma_3, g_0 \right] e^{\frac{i}{2} t H \sigma_3} + O(t^{-2}), \quad g_0 = \text{const}. \quad (15)$$

Таким образом, при конечных x и $|t| \rightarrow \infty$ решение стремится к невозмущенному, при этом скорость и амплитуда прецессии уменьшается, что согласуется с выводом, сделанным в пункте 2.

5. Метод обратной задачи позволяет построить серии точных решений уравнения (2) стандартным образом^{3,4}. Волновая функция $\psi(x, t, \lambda)$ для N -солитонного решения представляется в виде

$$\psi_N = \prod_{i \leq N} \left(I + \frac{\lambda_i - \bar{\lambda}_i}{\lambda - \lambda_i} P_i(x, t) \right) \exp(i\lambda \sigma_3 x), \quad (16)$$

где

$$P_i^{\alpha\beta}(x, t) = \frac{n_i^\alpha(x, t) \bar{n}_i^\beta(x, t)}{\sum_\gamma |n_i^\gamma(x, t)|^2}, \quad n_i(x, t) = \psi_{i-1}(x, t, \bar{\lambda}_i) n_{i0}, \quad \lambda_i = -\frac{1}{2(t+u_i)}. \quad (17)$$

Комплексные числа u_i и n_{i0}^1/n_{i0}^2 являются произвольными параметрами решения. По значению $\psi(x, t, \lambda)$ при $\lambda = 0$ легко найти $S(x, t)$, в простейшем случае односолитонного решения

$$S_1 + iS_2 = \frac{2a}{t^2 + a^2} (-it + a \operatorname{th} \varphi) e^{iX} / \operatorname{ch} \varphi, \\ S_3 = 1 - \frac{2a^2}{t^2 + a^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi}, \quad (18)$$

$$X = \frac{tx}{t^2 + a^2} + p, \quad \varphi = \frac{ax}{t^2 + a^2} + q,$$

где a, p, q — произвольные вещественные параметры. Это решение иллюстрирует выводы, сделанные в пунктах 2 и 4 о расплывании локализованных возмущений. Солитоны представ-

ляют собой кольцевую волну, радиус и толщина которой увеличивается со временем по линейному (при больших t) закону, а амплитуда при фиксированном x падает как t^{-1} .

6. В ряде работ (см., например,⁵) к уравнению (1) добавлен член, описывающий анизотропию взаимодействия, а кроме аксиальной симметрии предполагалась простая зависимость решения от времени (однородность прецессии)

$$g = \exp(-i\sigma_2 \theta(r) \exp(\omega t \sigma_3 / 2i)). \quad (19)$$

При этом были найдены решения типа "магнанных капель", быстро спадающие при r , большого некоторого характерного размера R_0 . В изотропном случае $R_0 = \infty$, а $\theta(r)$ подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \theta + \omega \sin \theta = 0, \quad (20)$$

которое имеет несингулярные и спадающие в пространстве решения. При больших r эти решения имеют асимптотику

$$\theta = \frac{\theta_0}{\sqrt{r}} \cos \left(\frac{r}{\sqrt{\omega}} - \theta_0^2 \ln r + c_1 \right) + O(r^{-3/2}). \quad (21)$$

Из-за медленного спада решения интегралы энергии и магнитного момента расходятся, кроме того оно неинтегрируемое в смысле нормы, введенной в пункте 3, и поэтому не попадает в исследуемый класс. Матрица рассеяния $T(0, \lambda)$ в этом случае имеет существенную особенность

$$T(0, \lambda) = g_0 \exp(i \sigma_3 \omega / 4 \lambda) g_0^{-1},$$

которую необходимо учитывать при выводе уравнений обратной задачи. В заключение мы благодарим Э.И.Рашба за обсуждение результатов.

Литература

1. Lakshman M. Phys. Lett., 1977, 61A, 53.
2. Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А. ТМФ, 1979, 38, 26.
3. Захаров В.Е., Михайлов А.В. ЖЭТФ, 1978, 74, 1953.
4. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. М.: Наука, 1980.
5. Kosevich A.M., Ivanov V.A., Kovalev A.S. Phys. 1981, 3D, 363.