

# Поверхностное натяжение чистых изотопов жидкого гелия

А. М. Дюгаев<sup>+</sup>, П. Д. Григорьев<sup>1)+△</sup>

<sup>+</sup> Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черногловка, Московская обл., Россия

<sup>\*</sup> Max-Planck-Institut for the Physics of Complex Systems, Dresden D-01187 Germany

<sup>△</sup> High Magnetic Field Laboratory, MPI-FRF and CNRS, BP166, Grenoble, F-38042, France

Поступила в редакцию 4 сентября 2003 г.

Рассмотрены эффекты, связанные с неоднородностью пара над жидким гелием. Оба чистых изотопа имеют поверхностные уровни, заселенность которых растет при повышении температуры  $T$ . Мы выделили их вклад в температурную зависимость поверхностного натяжения  $\sigma_3(T)$ ,  $\sigma_4(T)$  и провели сравнение теории с результатами экспериментальных работ, выполненных в Японии [1–3]. Для жидкого  $\text{He}^3$ :  $\sigma_3(T) = \sigma_3(0) - \alpha_3^\infty T^2$  при  $0.2 \text{ K} < T < 1 \text{ K}$ ;  $\sigma_3(T) = \sigma_3(0) - \alpha_3^0 T^2 \exp(-\Delta_3/T)$  при  $T < 0.2 \text{ K}$ , где  $\Delta_3 \approx 0.25 \text{ K}$ . Для жидкого  $\text{He}^4$  при  $T < 2 \text{ K}$ :  $\sigma_4(T) = \sigma_4(0) - AT^{7/3} - \alpha_4^0 T^2 \exp(-\Delta_4/T)$ , где  $A$  – постоянная Аткинса, а  $\Delta_4 \approx 4 \text{ K}$ . Параметры  $\alpha_3^0$ ,  $\alpha_3^\infty$ ,  $\alpha_4^0$  не зависят от свойств жидкости.

PACS: 67.55.–s, 73.20.Dx

1. В работах [1–4] проведено детальное экспериментальное исследование поверхностного натяжения чистых изотопов гелия. Для жидкого  $\text{He}^4$  при  $T < 1 \text{ K}$  имеет место закон Аткинса [1, 5]:

$$\sigma_4(T) = \sigma_4(0) - AT^{7/3}. \quad (1)$$

Для жидкого  $\text{He}^3$ , при  $0.16 \text{ K} < T < 0.9 \text{ K}$ ,  $\sigma_3(T)$  квадратично зависит от  $T$  [2]:

$$\sigma_3(T) = \sigma_3(0) - \alpha_3^\infty T^2. \quad (2)$$

При низких  $T < 0.16 \text{ K}$ , согласно данным работы [3],  $\sigma_3(T)$  не зависит от  $T$ , а экстраполяция закона (2) для  $T = 0$  имеет точность  $3 \cdot 10^{-3}$ . Эти экспериментальные результаты оставались загадочными на протяжении 15 лет. Повышение точности эксперимента привело к обнаружению слабого максимума на температурной зависимости  $\sigma_3(T)$  при  $T \approx 0.1 \text{ K}$ . Эффект этой немонотонной зависимости имеет порядок  $3 \cdot 10^{-4}$  [4].

В настоящей работе построена теория поверхностного натяжения жидкого гелия в широком интервале температур, основанная на общем для обоих изотопов физическом принципе. Предполагается, что на границе раздела жидкость–пар существуют локализованные атомные состояния, которые мы будем условно называть состояниями тумана. Условность состоит в возможности отнести туман как к жидкости, так и к пару [6]. Существование тумана очевидно, по крайней мере, для жидкого  $\text{He}^4$ . В самом

деле, объяснение немонотонной температурной зависимости поверхностного натяжения растворов изотопов гелия основано на выделении вклада связанных состояний атомов  $\text{He}^3$  на поверхности жидкого  $\text{He}^4$  (андреевские примесные уровни) [7]. Эффект связан с ван-дер-ваальсовским притяжением атома  $\text{He}^3$  к жидкому  $\text{He}^4$ . Атом  $\text{He}^4$  в  $4/3$  раз тяжелее атома  $\text{He}^3$ , поэтому, если существует поверхностный уровень для легкого атома  $\text{He}^3$ , он также существует и для тяжелого атома  $\text{He}^4$ . Статистика атомов здесь не играет роли, так как в первом приближении жидкий гелий является квантовой невырожденной жидкостью, а его поверхность не различает свои и чужие атомы [8, 9]. Отметим, что в отличие от ситуации, рассматриваемой в [7], энергия поверхностных уровней больше значения химического потенциала. По этой причине поверхностные уровни не заселены при  $T = 0$ . Существование поверхностных уровней подтверждается и анализом экспериментальных данных по подвижности электронов над жидким гелием. Имеется рассогласование теории и опыта в той области температур, где, как это кажется на первый взгляд, важны только эффекты рассеяния электронов на атомах пара [10].

2. Волновая функция предполагаемого поверхностного состояния имеет вид

$$\psi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\rho}, z) = \varphi(z) \exp(i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}), \quad (3)$$

где координаты  $\boldsymbol{\rho}, z$  отвечают движению атома вдоль и поперек поверхности жидкости. Граничное условие  $\varphi(\infty) = \varphi(-\infty) = 0$  является естественным

<sup>1)</sup>e-mail: pashag@itp.ac.ru

свойством локализованного поверхностного состояния. Функция (3) отвечает спектр

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon^0 + \mathbf{k}^2/2M, \quad (4)$$

где  $M$  – эффективная масса атома, а  $\varepsilon^0$  – энергия локализованного уровня. Для жидкого  $\text{He}^3$  вклад состояний (3) в поверхностное натяжение  $\sigma_3(T)$  определяется термодинамическим потенциалом  $\Omega_3(\mu_3, T)$  [6]:

$$\sigma_3(T) = \sigma_3(0) + \Omega_3(\mu_3, T), \quad (5)$$

$$\Omega_3(\mu_3, T) = -2T \int \ln\left(1 + \exp\left(\frac{\mu_3 - \varepsilon_3(k)}{T}\right)\right) \frac{d^2k}{(2\pi\hbar)^2},$$

где  $\mu_3(T)$  – химический потенциал жидкого  $\text{He}^3$ . Из (4), (5) получаем выражение для  $\Omega_3$ :

$$\Omega_3 = -T^2 \frac{M_3}{\pi\hbar^2} \int_0^\infty \frac{x dx}{\exp(x + \Delta_3/T) + 1}, \quad (6)$$

где  $\Delta_3$  – энергия уровня, отсчитанная от химического потенциала:  $\Delta_3 \equiv \varepsilon_3^0 - \mu_3$ . Параметр  $\Delta_3$  в (6) следует определять из сравнения теории и опыта. В первом приближении, пренебрегая температурной зависимостью  $\Delta_3$ , имеем из (6) при  $T \ll \Delta_3$

$$\sigma_3(T) = \sigma_3(0) - T^2 \exp\left(-\frac{\Delta_3}{T}\right) \alpha_3^0; \quad \alpha_3^0 = \frac{M_3}{\hbar^2 \pi}. \quad (7)$$

Это выражение объясняет выход на константу в зависимости поверхностного натяжения от температуры при  $T \ll \Delta_3 \approx 0.25$  К, наблюдавшуюся в [3]. Если положить  $M_3 = M_3^0$ , где  $M_3^0$  – масса атома  $\text{He}^3$ , получаем численное значение  $\alpha_3^0 = 27.2$  мдин/см<sup>2</sup>.

При  $T \gg \Delta_3$  из (6) получаем

$$\sigma_3(T) = \sigma_3(0) - T^2 \alpha_3^\infty; \quad \alpha_3^\infty = \alpha_3^0 \frac{\pi^2}{12}. \quad (8)$$

Численное значение  $\alpha_3^\infty = 22.4$  согласуется с измеренной величиной  $\alpha_3^\infty = 22.3$  [2]. Качественная зависимость  $\sigma$  от  $T$ , объясняющая опытные данные работ [2, 3], имеет вид

$$\sigma_3(T) = \sigma_3(0) - \alpha_3^\infty T^2 \exp(-\Delta_3/T). \quad (9)$$

Оценка для  $\Delta_3^0 \approx 0.25$  К получается из сравнения (7) с экспериментальными данными [3], а значение  $\mu_3(0) = -2.5$  К определяет энергию связанного поверхностного состояния  $\varepsilon_3^0 = \mu_3(0) + \Delta_3^0 \approx -2.25$  К.

В следующем приближении нужно учесть зависимость параметра  $\Delta_3^0 = \varepsilon_3^0 - \mu_3$  от  $T$ . Температурная зависимость химического потенциала  $\mu_3 = \mu_3(T)$  определяется на основе точного выражения [6]

$$\mu = \bar{F} + P/n_L, \quad (10)$$

где  $\bar{F}$  – свободная энергия на один атом,  $P$  – давление,  $n_L$  – плотность жидкости. Если температура не слишком высока,  $P = n_v T$ , где  $n_v$  – плотность пара. Так как  $n_v \ll n_L$ , то второй член в (10) мал и зависимость  $\mu_3$  от  $T$  можно найти на основе выражения [6]

$$\mu_3(T) = \mu_3(0) + \int_0^T C_3(T_1) dT_1 - T \int_0^T \frac{C_3(T_1) dT_1}{T_1}, \quad (11)$$

где  $C_3(T)$  – теплоемкость на один атом  $\text{He}^3$ . Проведем, прежде всего, качественный анализ эффектов температурной зависимости  $\Delta_3(T)$ . При низких температурах  $C_3(T) = T/T_F$ , и из (11) получаем

$$\mu_3(T) = \mu_3(0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{T^2}{T_F}, \quad (12)$$

где  $T_F$  – температура вырождения  $\text{He}^3$ :  $T_F \cong 0.36$  К [11]. При высоких температурах,  $T > T_F$ , согласно теории квантовых невырожденных жидкостей [8, 9], главная температурная зависимость  $\bar{F}$  определяется спиновой энтропией  $S_\sigma = \ln 2$ :

$$\mu_3(T) \approx \mu_3(0) - T \ln 2. \quad (13)$$

Температурную зависимость энергии  $\varepsilon_3^0(T)$  можно оценить, рассмотрев неидеальность тумана в первом вириальном приближении:

$$\varepsilon_3^0(T) = \varepsilon_3^0(0) + V_3 n_3(T), \quad (14)$$

где  $V_3$  – феноменологический потенциал взаимодействия атомов  $\text{He}^3$ , а значение плотности тумана  $n_3(T)$  дается выражением

$$n_3(T) = 2 \int \frac{d^2k}{(2\pi\hbar)^2} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_3(k) - \mu_3}{T}\right) + 1}. \quad (15)$$

Из (4), (15) получаем

$$n_3(T) = \frac{M_3 T}{\pi\hbar^2} \ln\left[1 + \exp\left(-\frac{\Delta_3}{T}\right)\right]. \quad (16)$$

Из (11), (14), (16) следует уравнение на параметр  $\Delta_3(T)$ :

$$\Delta_3(T) = \Delta_3^0(T) + \lambda_3 T \ln\left[1 + \exp\left(-\frac{\Delta_3(T)}{T}\right)\right], \quad (17)$$

$$\Delta_3^0(T) = \varepsilon_3^0(0) - \mu(T), \quad \lambda_3 = V_3 \frac{M_3}{\pi\hbar^2}.$$

При высоких температурах  $T > T_F$  на основе (13), (17) получаем

$$\Delta_3(T) \approx \Delta_3(0) + T \ln 2 + \lambda_3 T \ln \left[ 1 + \exp\left(-\frac{\Delta_3(T)}{T}\right) \right]. \quad (18)$$

С учетом малости  $\Delta_3(0) \approx 0.25$  К из (18) следует, что  $\Delta(T) \sim T$  независимо от знака взаимодействия  $V_3$  при высоких  $T > T_F$ , а из (5), (6) видно, что  $\sigma_3(T) - \sigma_3(0) \sim T^2$ .

Итак, учет температурной зависимости параметра  $\Delta_3$  в (6) не противоречит имеющему место на опыте закону (2) при высоких  $T > T_F$ . Параметр  $\Delta_3(0)$  находится по данным работ [2, 3] очень точно, однако в определении  $\lambda_3$  (17) и эффективной массы  $M_3$  (6) есть неоднозначность, связанная с тем, что уже первое приближение  $\Delta_3 = 0$ ,  $M_3 = M_3^0$  имеет точность  $3 \cdot 10^{-3}$ . Далее мы ограничимся рассмотрением модели идеального тумана ( $\lambda_3 = 0$ ) (17), а температурную зависимость  $\mu_3(T)$  найдем точно на основе (11) и опытных данных для  $C_3(T)$  [11]. Можно привести аналитическое выражение для  $\Delta_3(T) = \Delta_3(0) - \mu_3(T)$ , так как при  $T < 2$  К данные [11] хорошо согласуются с зависимостью вида

$$C_3(T) = 0.2T + 0.105 \frac{T}{T^2 + T_0^2}; \quad T_0 = 0.21 \text{ К}. \quad (19)$$

Теоретическое обоснование (19) дано в [9]. На основе (11), (19) определяется зависимость  $\Delta_3 = \Delta_3(T)$ :

$$\Delta_3(T) = 0.25 + 0.2T^2 + 0.5T \operatorname{arctg} \frac{T}{T_0} - 0.053 \ln \left( 1 + \frac{T^2}{T_0^2} \right), \quad (20)$$

температура  $T$  определяется в К.

Численное интегрирование на основе (11) и данных [11] для  $C_3(T)$  подтверждает (20) с точностью  $10^{-2}$  при  $T < 1.5$  К, а сравнение (5), (6) с опытными данными для  $\sigma_3(T)$  [2, 3] дает значение эффективной массы  $M_3 = 2.25M_3^0$  в модели идеального тумана. С точностью  $3 \cdot 10^{-4}$  при  $T < 0.4$  К зависимость  $\sigma_3 = \sigma_3(T)$  имеет вид (рис.1)

$$\sigma_3(T) = \sigma_3(0) - \alpha_3^0 T^2 \int_0^\infty \frac{x dx}{\exp\left(x + \frac{\Delta_3}{T}\right) + 1}, \quad (21)$$

где  $\sigma_3(0) = 155.3$  мдин/см и  $\alpha_3^0 = 61.2$  мдин/см  $\cdot$  К<sup>2</sup>.

В более широком интервале  $T < 2$  К температурная зависимость  $\sigma_3(T)$  (21), (20) приведена на рис.2, где представлены и экспериментальные данные ра-

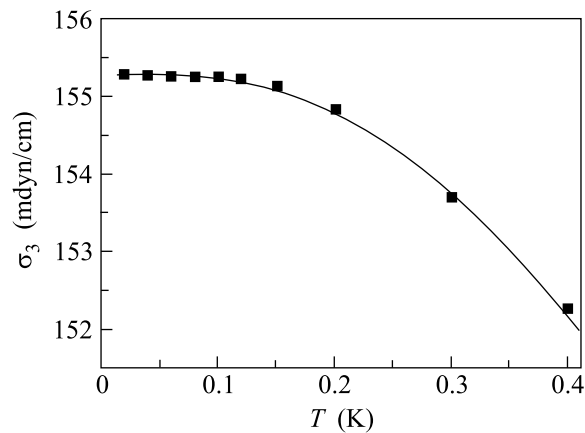


Рис.1. Сравнение температурной зависимости поверхностного натяжения  $\sigma_3(T)$  жидкого  $\text{He}^3$ , определенной выражением (21) (сплошная линия) и экспериментальных данных работ [2, 3] (точки) в области низкой температуры. Предлагаемая теория хорошо объясняет отклонение зависимости  $\sigma_3(T)$  от квадратичной при  $T < \Delta_3^0$

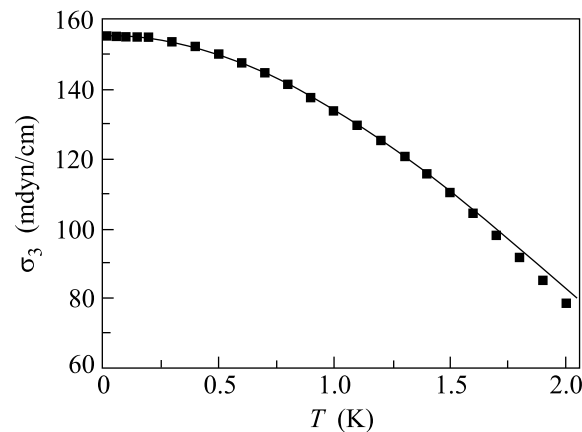


Рис.2. Сравнение рассчитанной зависимости  $\sigma_3$  от  $T$  (21) с опытными данными [2, 3] в широком интервале температур

бот [2, 3]. Для обоснования модели идеального тумана приведем значение плотности  $n_3(T)$  (16) при  $T = 1$  К:  $n_3(1) = 1.44 \cdot 10^{14}$  см<sup>-2</sup>. Полностью насыщенному (плотно упакованному) туману отвечает величина  $(n_{03})^{2/3} = 6.5 \cdot 10^{14}$  см<sup>-2</sup>, где  $n_{03}$  – плотность жидкого  $\text{He}^3$ . Так как  $n_3(1) \ll (n_{03})^{2/3}$ , приближение  $\lambda_3 = 0$  в уравнении (17) имеет область применимости по крайней мере при низких температурах. Рассматриваемая модель (20), (21) не объясняет немонотонность зависимости  $\sigma_3(T)$  при  $T \approx 0.1$  К, то есть эффекты  $\approx 3 \cdot 10^{-4}$  [4]. Поэтому следует уточнять модель ферми-жидкостными поправками, которые уже рассматривались в работах [12–15]. Однако в рамках теории ферми-жидкости невозможно объяснить

температурную зависимость  $\sigma_3(T)$  (2) при высоких  $T > T_F$ , когда  $\text{He}^3$  является квантовой, но невырожденной жидкостью [8, 9].

**3. Определение поверхностного натяжения жидкого  $\text{He}^4$ ,  $\sigma_4(T)$  предполагает выделение вклада поверхностных уровней  $\sigma_S(T)$  на фоне риплонного вклада  $\sigma_R(T) = -AT^{7/3}$  при  $T < 1$  К [5]:**

$$\sigma_4(T) = \sigma_4(0) + \sigma_R(T) + \sigma_S(T). \quad (22)$$

Аналогично (6), (16) можно определить величины  $\sigma_S(T)$  и  $n_4(T)$  [6]:

$$\sigma_S(T) = -T^2 \frac{M_4}{2\pi\hbar^2} \cdot \int_0^\infty \frac{x dx}{\exp(x + \frac{\Delta_4}{T}) - 1}, \quad (23)$$

$$n_4(T) = -\frac{M_4 T}{2\pi\hbar^2} \ln \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta_4}{T}\right) \right],$$

где  $M_4$  – эффективная масса атома  $\text{He}^4$ , а  $\Delta_4$  – энергия поверхностного уровня, отсчитанная от химического потенциала  $\mu_4$ :  $\Delta_4 = \varepsilon_4^0 - \mu_4$ . Зависимость  $\mu_4 = \mu_4(T)$  дается выражением (11) с заменой  $C_3 \rightarrow C_4$ . Теплоемкость  $C_4(T)$ , в отличие от  $C_3(T)$ , не имеет большого спинового вклада, поэтому при  $T < T_\lambda$  можно положить  $\mu(T) = \mu(0) = -7.15$  К. В модели идеального тумана на основе сравнения (22), (23) и опытных данных работы [1] определяются параметры  $\Delta_4 \approx 4$  К и  $M_4 \approx 2.6 M_4^0$ , где  $M_4^0$  – масса атома  $\text{He}^4$ . Температурная зависимость  $\sigma_4(T)$  при  $T < T_\lambda$  имеет вид (рис.3)

$$\sigma_4(T) = \sigma_4(0) - AT^{7/3} - \alpha_4^0 T^2 \int_0^\infty \frac{x dx}{\exp(\frac{\Delta_4}{T} + x) + 1}, \quad (24)$$

где  $\sigma_4(0) = 354.4$ , постоянная Аткинса  $A = 6.8$  и  $\alpha_4^0 = 47$ . Соответствующее значение энергии поверхностного уровня  $\varepsilon_4^0 \approx -3.15$  К.

На основе (23), (24) и данных [1] существует интересная возможность определить риплонный вклад в  $\sigma_4(T)$  при  $T > T_\lambda$  (рис.4):

$$-\sigma_R(T) = \sigma_4(0) - \sigma_4(T) + \sigma_S(T). \quad (25)$$

Для величины  $\sigma_S(T)$  температура сверхтекучего перехода  $T_\lambda$  ничем не выделена, поэтому зависимость (23) имеет место и при  $T > T_\lambda$ . Однако для  $\sigma_R(T)$  переход через точку  $T = T_\lambda$  очень критичен, как это видно на рис.4. При  $T > T_\lambda$  риплоны сильно затухают, что связано с большим значением вязкости  $\eta$  нормального  $\text{He}^4$ . Коэффициент затухания риплонов

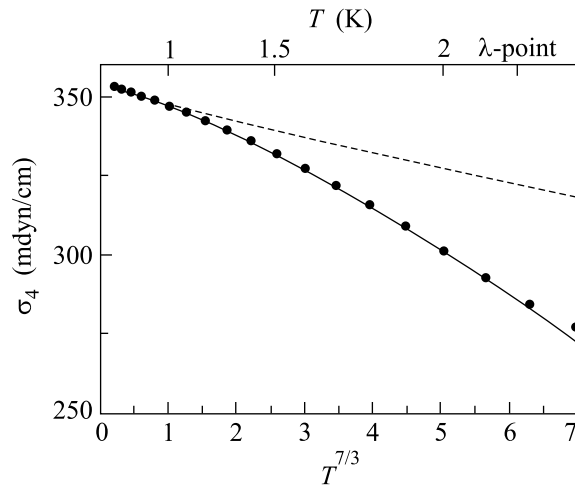


Рис.3. Температурная зависимость поверхностного натяжения  $\sigma_4$  жидкого  $\text{He}^4$ , определенная на основе (24) (сплошная линия) и риплонный вклад в  $\sigma_4(T)$  (пунктирная линия). Точки – данные работы [1]

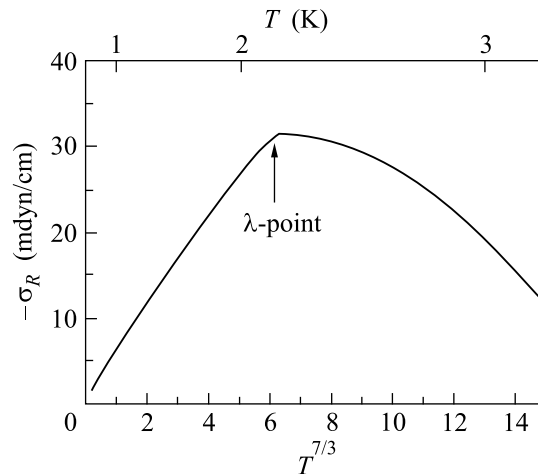


Рис.4. Риплонный вклад  $\sigma_R(T)$  в поверхностное натяжение  $\sigma_4(T)$ , определенный на основе (23), (25) и экспериментальных данных [1]

$\gamma$  можно оценить на основе связи  $\gamma$  с  $\eta$  и плотностью жидкости  $\rho$  [16]:  $\gamma = 2\eta k_T^2 / \rho$ . Характерный тепловой импульс  $k_T$  находится из условия  $\hbar\omega(k_T) \approx T$ , где  $\omega^2(k_T) = \sigma k_T^3 / \rho$ . Малость  $\gamma(k_T) < \omega(k_T)$  возможна, если выполнено неравенство

$$\frac{2\eta(T)}{\sigma^{2/3}} \left( \frac{T}{\hbar\rho} \right)^{1/3} < 1. \quad (26)$$

Для  $\text{He}^4$  из (26) следует критерий

$$\eta_4(T) T^{1/3} \cdot 4 \cdot 10^4 < 1, \quad (27)$$

где  $\eta_4$  в г/см·с. Для нормального  $\text{He}^4$   $\eta_4(T) > 2 \cdot 10^{-5}$ , поэтому неравенство (27) не имеет места для  $\text{He}^4$  при  $T > T_\lambda$ .

Для жидкого  $\text{He}^3$  аналогичное неравенство имеет вид

$$\eta_3(T) T^{1/3} \cdot 10^5 < 1. \quad (28)$$

Согласно опытным данным [17] и теории [9] зависимость  $\eta_3 = \eta_3(T)$  при  $T < 2$  К дается выражением

$$\eta_3(T) = \left( \frac{2.5}{T^2} + 17.5 + \frac{9.4}{T} \right) \cdot 10^{-6} \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}}. \quad (29)$$

Из (28), (29) видно, что для жидкого  $\text{He}^3$  тепловые риплоны сильно затухают при всех  $T$ , а не только при  $T \ll T_F$ , когда  $\eta_3(T) \sim 1/T^2$  (29). По этой причине термодинамика поверхности жидкого  $\text{He}^3$  полностью определяется вкладом поверхностных уровней при  $T < 2$  К (рис.2). Для жидкого  $\text{He}^4$  вклад риплонов в  $\sigma_4(T)$  является главным при  $T < 1$  К, но несущественным при  $T > 2.5$  К (рис.4). Отметим, что объяснение отличия зависимости  $\sigma_4 = \sigma_4(T)$  от закона Аткинса (1) при  $T > 1$  К существованием ротонного минимума у спектра риплонов [17] не согласуется с нашими представлениями. На рис.4 видно, что  $\sigma_R \sim T^{7/3}$  при всех  $T < T_\lambda$ .

Итак, мы предложили количественную теорию поверхностных явлений для жидкого гелия, которая согласуется с экспериментальными результатами серии прекрасных работ, выполненных в Японии [1–3].

Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований (# 03-02-16121) и INTAS (# 01-0791).

1. M. Iino, M. Suzuki, and A. J. Ikushima, J. Low Temp. Phys. **61**, 155 (1985).
2. M. Iino, M. Suzuki, A. J. Ikushima, and Y. Okuda, J. Low Temp. Phys. **59**, 291 (1985).
3. M. Suzuki, Y. Okuda, A. J. Ikushima, and M. Iino, Europhys. Lett. **5**, 333 (1988).
4. K. Matsumoto, Y. Okuda, M. Suzuki, and S. Misawa, J. Low Temp. Phys. **125**, 59 (2001).
5. K. R. Atkins, Can. J. Phys. **31**, 1165 (1953).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, М.: Наука, 1976.
7. А. Ф. Андреев, ЖЭТФ **50**, 1415 (1966).
8. А. М. Dyugaev, J. Low Temp. Phys. **78**, 79 (1990).
9. А. М. Dyugaev, Sov. Sci. Rev. A. Phys. **14**, 1 (1990).
10. K. Shirahama, S. Ito, H. Suto, and K. Kono, J. Low Temp. Phys. **101**, 439 (1995).
11. D. S. Greywall, Phys. Rev. **B27**, 2747 (1983).
12. F. Dalfovo and S. Stringari, J. Low Temp. Phys. **77**, 307 (1989).
13. S. Misawa, J. Low Temp. Phys. **125**, 49 (2001).
14. S. Misawa and H. Morita, Physica **B165**, 643 (1990).
15. H. Esbensen and G. F. Bertsch, Phys. Rev. Lett. **52**, 2257 (1984).
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, М.: Физматлит, 2001.
17. Л. С. Реут, И. З. Фишер, ЖЭТФ **60**, 1814 (1971).