Письма в ЖЭТФ, том 75, вып. 7, с. 428 – 432

Коллапс в нелинейном уравнении Шредингера критической размерности $\{\sigma = 1,\ D = 2\}$

Ю. Н. Овчинников[+*], *И. М. Сигал*[□1)]

[+]*Max-Planck Institute for Physics of Complex System, D-01187 Dresden, Germany*

[*]*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 117940 Москва, Россия*

[□]*University of Toronto, Department of Mathematics, M5S 3G3 Toronto, Ontario, Canada*

Поступила в редакцию 27 февраля 2002 г.

В адиабатическом приближении исследованы коллапсирующие решения нелинейного уравнения Шредингера в критической размерности $\{\sigma = 1,\ D = 2\}$. Получено трехпараметрическое семейство решений для масштабного множителя $\lambda(t)$. Показано, что решение Таланова лежит на сепаратрисе, разделяющей области коллапса и обычного расширения. Сравнение с численными решениями показывает, что слабоколлапсирующие решения являются хорошим начальным приближением к проблеме коллапса.

PACS: 02.30.Jr, 03.65.Ge

Нелинейное уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi + |\psi|^{2\sigma}\psi = 0 \tag{1}$$

в критическом случае ($\sigma = 1,\ D = 2$) имеет решения различного вида, коллапсирующие за конечное время. Одно из них (точное решение уравнения (1)) было получено Талановым [1]. Второй тип коллапсирующих решений был найден Захаровым [2]. Универсальное поведение решений этого типа нарушается только вблизи точки коллапса, при соответствующем выборе начальных данных [3, 4] (см. также [5, 6]). Но область такого нарушения чрезвычайно узка [7, 8]. В критическом случае $\{\sigma = 1,\ D = 2\}$ третий тип решений (слабый коллапс) переходит в решение второго типа.

Ниже мы исследуем поведение коллапсирующего решения в предположении, что существует адиабатический параметр. В результате исследования будет показано, что мера реализации решения типа Таланова равна нулю, и тем самым решения этого типа не реализуются в численном эксперименте при начальных данных общего положения.

"Хвост" коллапсирующего решения никогда не является универсальным. Практически универсальной может быть лишь функция в области, в которой она не слишком мала. Мы покажем, что в такой области численный счет [9] с высокой точностью описывается слабоколлапсирующим решением при определенном выборе свободных параметров.

1) I. M. Sigal.

1. Адиабатический подход к коллапсу. Уравнение (1) имеет стационарное решение $\tilde\psi$, экспоненциально убывающее на бесконечности:

$$\Delta\tilde\psi + |\tilde\psi|^2\tilde\psi = |E_0|\tilde\psi; \quad E_0 < 0, \quad \tilde\psi = \tilde\psi(|r|). \tag{2}$$

Если $\tilde\psi$ есть решение уравнения (2), то функция $\hat\psi$ такая, что

$$\hat\psi = \frac{1}{\lambda}\exp\left(\frac{i|E_0|}{\lambda^2}(t - t_0)\right)\tilde\psi(\rho/\lambda), \quad \rho = |r|, \tag{3}$$

также является решением уравнения (1) при произвольном, не зависящим от времени, значении λ. Это свойство уравнения (1) позволяет воспользоваться адиабатической теорией (адиабатический параметр $\lambda\dot\lambda$) для исследования уравнения (1) (см. [3 – 5]). И наша цель – получить уравнение на параметр λ. В главном приближении по параметру адиабатичности мы получим ниже нелинейное уравнение третьего порядка для масштабного параметра λ. Уравнение (1) есть уравнение первого порядка по времени t. Следовательно, решение полностью определяется заданием функции ψ в фиксированный момент времени. Это означает, что изменение начального состояния приведет к изменению вида коллапсирующего решения. С этой точки зрения зависимость параметра λ от времени вида $(t_0 - t)^\alpha$ не универсальна и зависит от параметров, связанных с начальной формой функции ψ. Мы покажем, что решение Таланова является сепаратрисой для процесса коллапса и регулярного развития. В результате эффективная мера для этого решения равна нулю, и его нельзя получить при численном счете. Но существует область начальных данных, приводящих к сжатию состояния до малого, но конечного размера с последующим расширением.

2. Уравнение на масштабный параметр λ. Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$\psi = (\lambda^{-1}\tilde{\psi}(\rho/\lambda) + \psi_1(\rho/\lambda, t)) \exp\left(i|E_0|\int^t \frac{dt_1}{\lambda^2(t_1)}\right), \tag{4}$$

где $\lambda \equiv \lambda(t)$, а функция $\tilde{\psi}$ удовлетворяет уравнению (2). Ниже мы положим

$$x = \rho\big/\lambda. \tag{5}$$

Подставляя выражение (4) для функции ψ в уравнение (1), получим точное уравнение:

$$\left\{\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_1 + \psi_1^2(2\psi_1+\psi_1^*) - |E_0|\psi_1\right\} +$$

$$+ i\lambda^2\frac{\partial\psi_1}{\partial t} - i\lambda\dot{\lambda}x\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \lambda\tilde{\psi}(\psi_1^2 + 2\psi_1\psi_1^*) +$$

$$+\lambda^2\psi_1^2\psi_1^* - i\dot{\lambda}\tilde{\psi} - i\dot{\lambda}x\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x} = 0, \tag{6}$$

где

$$\dot{\lambda} = \partial\lambda/\partial t. \tag{7}$$

Мы воспользуемся адиабатическим приближением и будем рассматривать параметр $\lambda\dot{\lambda}$ как малую величину:

$$\lambda\dot{\lambda} \ll 1. \tag{8}$$

Поправка первого порядка находится легко, и в результате для функции ψ_1 находим следующее представление:

$$\psi_1 = i\tilde{\psi}\left(\frac{\dot{\lambda}}{4}x^2 + \beta\right) + \phi + i\psi_3, \tag{9}$$

где $\beta \equiv \beta(t)$ – произвольная функция времени t порядка $\dot{\lambda}, \phi$ – вещественная поправка второго порядка и ψ_3 есть поправка третьего порядка. Функция ϕ может быть найдена из уравнений (6), (9):

$$\phi = \hat{L}^{-1}\left\{\lambda^2\tilde{\psi}\left(\frac{\ddot{\lambda}}{4}x^2 + \frac{\partial\beta}{\partial t}\right) - \right. \tag{10}$$

$$\left. -\lambda\dot{\lambda}x\left(\beta\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x} + \frac{x\dot{\lambda}}{2}\tilde{\psi} + \frac{\dot{\lambda}x^2}{4}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\right) - \lambda\left(\frac{\dot{\lambda}}{4}x^2 + \beta\right)^2\tilde{\psi}^3\right\},$$

где оператор $\hat{L}$ определяется выражением

$$\hat{L} = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) + 3\tilde{\psi}^2 - |E_0|. \tag{11}$$

Отметим, что оператор

$$\hat{L}_1 = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) + \tilde{\psi}^2 - |E_0| \tag{12}$$

имеет нулевую моду $i\tilde{\psi}$:

$$\hat{L}_1(i\tilde{\psi}) = 0.$$

Следовательно, правая часть уравнения для ψ_3 должна быть ортогональна к функции $\tilde{\psi}$. Это условие дает уравнение для функции $\lambda(t)$:

$$\int_0^\infty dx x\tilde{\psi}\left\{\lambda^2\frac{\partial\phi}{\partial t} - \lambda\dot{\lambda}x\frac{\partial\phi}{\partial x} + 2\lambda\tilde{\psi}^2\left(\frac{\dot{\lambda}}{4}x^2 + \beta\right)\phi + \right.$$

$$\left. + \lambda^2\tilde{\psi}^3\left(\frac{\dot{\lambda}}{4}x^2 + \beta\right)^3\right\} = 0. \tag{13}$$

Для упрощения этого уравнения воспользуемся следующими точными уравнениями:

$$\hat{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x\tilde{\psi})\right) = 2|E_0|\tilde{\psi},$$

$$\hat{L}\tilde{\psi} = 2\tilde{\psi}^3, \tag{14}$$

$$\hat{L}(x^2\tilde{\psi}) = 2x^2\tilde{\psi}^3 + 4\frac{\partial}{\partial x}(x\tilde{\psi}).$$

Используя соотношения (10), (14), приведем уравнение (13) для величины λ к сравнительно простому виду:

$$\frac{\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\lambda^2\beta^2)\int_0^\infty dx x\left(\tilde{\psi}^2 - \frac{1}{2|E_0|}\tilde{\psi}^4\right) +$$

$$+\lambda\frac{\partial}{\partial t}(\lambda^2\dot{\lambda}\beta)\int_0^\infty dx x\left\{\frac{3}{4}(x\tilde{\psi})^2 - \frac{1}{2|E_0|}(\tilde{\psi}^2 + x^2\tilde{\psi}^4)\right\} +$$

$$+\frac{1}{32}(\lambda^2\dot{\lambda}^3 + \lambda^3\dot{\lambda}\ddot{\lambda})\left\{10\int_0^\infty dx x(x^4\tilde{\psi}^2) - \right.$$

$$\left. -\frac{7}{|E_0|}\int_0^\infty dx x(x\tilde{\psi})^4\right\} - \frac{1}{|E_0|}\left(\lambda^2\dot{\lambda}^3 + \frac{11}{8}\lambda^3\dot{\lambda}\ddot{\lambda} + \frac{1}{8}\lambda^4\dddot{\lambda}\right) \times$$

$$\times \int_0^\infty dx x(x\tilde{\psi})^2 = 0. \tag{15}$$

Уравнения (14) приводят к важным интегральным соотношениям. Из первого уравнения (14) получаем

$$\int_0^\infty dx x\tilde\psi\left\{\hat L\left(\frac{\partial}{\partial x}(x\tilde\psi)\right) - 2|E_0|\tilde\psi\right\} = 0. \qquad (16)$$

С учетом второго из уравнений (14), уравнение (16) принимает вид

$$\int_0^\infty dx x\tilde\psi^3\frac{\partial}{\partial x}(x\tilde\psi) = |E_0|\int_0^\infty dx x\tilde\psi^2. \qquad (17)$$

Интегрирование по частям в левой части уравнения (17) дает первое из соотношений

$$\int_0^\infty dx x\tilde\psi^4 = 2|E_0|\int_0^\infty dx x\tilde\psi^2. \qquad (18)$$

Аналогичным образом находим с помощью третьего уравнения (14)

$$2|E_0|\int_0^\infty dx x(x^2\tilde\psi)\frac{\partial}{\partial x}(x\tilde\psi) = $$
$$= \int_0^\infty dx x\left(\frac{\partial}{\partial x}(x\tilde\psi)\right)\left[2x^2\tilde\psi^3 + 4\frac{\partial}{\partial x}(x\tilde\psi)\right]. \qquad (19)$$

Простые вычисления с использованием уравнения (18) дают второе соотношение:

$$\frac{3}{2}|E_0|\int_0^\infty dx(x\tilde\psi)^2 = \int_0^\infty dx x\tilde\psi^2 + \int_0^\infty dx x(x^2\tilde\psi^4). \qquad (20)$$

Уравнения (18), (20) означают, что величина β в рассматриваемом приближении выпадает из уравнения (15). Следующее существенное упрощение уравнения (15) достигается применением точного соотношения

$$\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)(x^4\tilde\psi) =$$
$$= 16x^2\tilde\psi + 8x^3\frac{\partial\tilde\psi}{\partial x} + x^4(|E_0|\tilde\psi - \tilde\psi^3). \qquad (21)$$

Умножая обе части уравнения (21) на функцию $(\partial/\partial x)(x\tilde\psi)$ и интегрируя по xdx в интервале $(0,\infty)$, получаем соотношение

$$10|E_0|\int_0^\infty dx x(x^4\tilde\psi^2) - 7\int_0^\infty dx x(x\tilde\psi)^4 = 32\int_0^\infty dx(x\tilde\psi)^2. \qquad (22)$$

Используя уравнения (18), (20), (22), мы приведем уравнение (15) для параметра λ к окончательному виду:

$$\lambda\dddot\lambda + 3\dot\lambda\ddot\lambda = 0. \qquad (23)$$

Уравнение (23) легко интегрируется. В результате первого интегрирования уравнение (23) сводится к уравнению второго порядка с одной произвольной константой C:

$$\ddot\lambda = C/\lambda^3. \qquad (24)$$

Уравнение (24) также имеет первый интеграл:

$$\dot\lambda^2 = -C/\lambda^2 + C_1. \qquad (25)$$

Общее решение уравнения (25) с тремя произвольными константами (C, C_1, t^*) есть

$$\lambda = \left[C_1(t^* - t)^2 + C/C_1\right]^{1/2}. \qquad (26)$$

В зависимости от знаков коэффициентов $\{C, C_1\}$ уравнение (26) допускает следующие виды решений:

a) $C > 0$, $C_1 > 0$. Происходит сжатие, система проходит через конечный минимальный размер и затем наступает стадия расширения;

b) $C < 0$, $C_1 > 0$. Возникает коллапс на конечном интервале времени;

c) $C < 0$, $C_1 < 0$. Коллапс возникает после конечного периода расширения;

d) $C = 0$. Возникает решение Таланова – это есть сепаратриса между областями коллапса и расширения. Мера такого события равна нулю.

3. Слабый коллапс. В критическом случае $\{\sigma = 1, D = 2\}$ уравнение (1) имеет также слабоколлапсирующие решения. В этом случае слабоколлапсирующие решения и коллапсирующие решения с параметром $\nu = 1/2$ (см. [8]) совпадают. Слабоколлапсирующие решения имеют вид [8]

$$\psi = \frac{1}{\lambda}\varphi(\rho/\lambda)\exp(i\chi), \qquad (27)$$

где масштабный параметр $\lambda \equiv \lambda(t)$ и фаза χ определяются выражениями

$$\lambda = \frac{\sqrt{t_0 - t}}{C}, \quad \chi = -\frac{C_1}{2}\ln(t_0 - t) + \tilde\chi(\rho/\lambda). \qquad (28)$$

Модуль φ и фаза $\tilde\chi$ связаны с функцией Z соотношениями

$$\varphi = \sqrt{Z'}/\sqrt{y}, \quad \tilde\chi' = -y/4C^2, \quad y = \rho/\lambda, \qquad (29)$$

где $\{C, C_1\}$ – некоторые константы.

В рассматриваемом случае $\{\sigma = 1, D = 2\}$ функция Z сама является решением обыкновенного дифференциального уравнения:

$$Z''' - \frac{(Z'')^2}{2Z'} + \frac{Z'}{2y^2} + \frac{1}{C^2}\left(\frac{y^2}{8C^2} - C_1\right)Z' + \frac{2(Z')^2}{y} = 0. \tag{30}$$

Полагая

$$Z' = \phi, \tag{31}$$

получим уравнение второго порядка для функции ϕ:

$$\phi'' - \frac{(\phi')^2}{2\phi} + \frac{\phi}{2y^2} + \frac{1}{C^2}\left(\frac{y^2}{8C^2} - C_1\right)\phi + \frac{2\phi^2}{y} = 0. \tag{32}$$

При малых значениях y находим из этого уравнения

$$\phi = A\left\{y + \left(\frac{C_1}{4C^2} - \frac{A}{2}\right)y^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{y5}{128}\left(-\frac{1}{C^4} + \left(\frac{C_1}{C^2} - 2A\right)\left(3\frac{C_1}{C^2} - 10A\right)\right) + \ldots\right\}. \tag{33}$$

В области $y \to \infty$ общее решение уравнения (32) представимо в виде

$$\phi = B\phi_0\left[1 + \sin\left(\frac{1}{2C^2}\int\frac{dy}{\phi_0}\right)\right] + \phi_1, \tag{34}$$

где функция ϕ_0 есть решение линейного уравнения

$$\phi_0''' + \frac{\phi_0'}{y^2} - \frac{\phi_0}{y^3} + \frac{2\phi_0}{C^2}\left(\frac{y^2}{8C^2} - C_1\right) + \frac{y}{4C^4}\phi_0 = 0, \tag{35}$$

имеющего асимптотику на бесконечности вида

$$\phi_0 = \frac{1}{y}\left\{1 + \frac{4C_1C^2}{y^2} + \frac{8C^4(3C_1^2 - 1)}{y^4} + \right.$$
$$\left. + \frac{32C_1C^6(5C_1^2 - 7)}{y^6} + \ldots\right\}. \tag{36}$$

Функция ϕ_1 мала и может быть найдена по теории возмущений. Мы не будем приводить её здесь.

С помощью подстановки

$$\phi = y\varphi^2 \tag{37}$$

уравнение (32) сводится к уравнению, описывающему коллапс с $\nu = 1/2$ (см. [8]).

$$\varphi'' + \frac{\varphi'}{y} + \frac{y^2\varphi}{16C^4} - \frac{C_1}{2C^2}\varphi + \varphi^3 = 0. \tag{38}$$

При $C \to \infty$ и фиксированном значении $\varphi(0)$ (см. (2), (3)) существует конечное значение C_2 такое, что при значении $C_1/C^2 = 2A + C_2$ функция φ убывает экспоненциально на бесконечности. Численное решение уравнения (38) дает следующие значения параметров $\{\varphi(0), C_2\}$:

$$\varphi(0) = 1.6, \qquad C_2 = -4.0682. \tag{39}$$

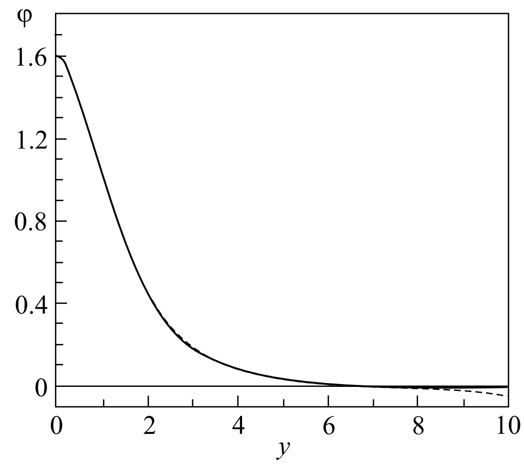

Рис.1. Функция φ, соответствующая наборам параметров $\{A, C, C_1, C_2\}$: сплошная линия соответствует набору $\{A = \varphi(0)^2 = 1.6^2,\ C \to \infty,\ C_2 = -4.0682,\ C_1/C^2 = 2A + C_2\}$; штриховая линия соответствует набору $\{A = 1.6^2,\ C = 2,\ C_2 = -4.041,\ C_1/C^2 = 2A + C_2\}$

На рис.1 приведены значения функции φ на интервале $y = [0, 10]$, соответствующие двум наборам параметров $\{A, C, C_1, C_2\}$: сплошная линия соответствует набору $\{A = \varphi^2(0) = 1.6^2,\ C \to \infty,\ C_2 = -4.0682,\ C_1/C^2 = 2A + C_2\}$, штриховая – набору $\{A = 1.6^2,\ C = 2,\ C_2 = -4.041,\ C_1/C^2 = 2A + C_2\}$.

На рис.2 приведен профиль решения $|U|$, полученного численно в работе [9]. Отметим, что предельная функция φ $(C \to \infty)$ отличается от функции $|U|$ лишь при больших значениях y, то есть в области, где обе функции малы и функция $|U|$ не универсальна. Численный счет показывает также, что в области $C \geq 1$ существует узкая область значений C_2 (в окрестности точки -4.0682), в которой слабоколлапсирующее решение очень мало отличается от предельной функции $\varphi(C \to \infty)$ при $y < 6 - 7$. Это обстоятельство, по-видимому, может быть использовано при построении многопараметрического коллапсирующего решения.

В адиабатическом приближении нами получено нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка для масштабного множителя $\lambda(t)$, определяющего временную зависимость решений нелинейного

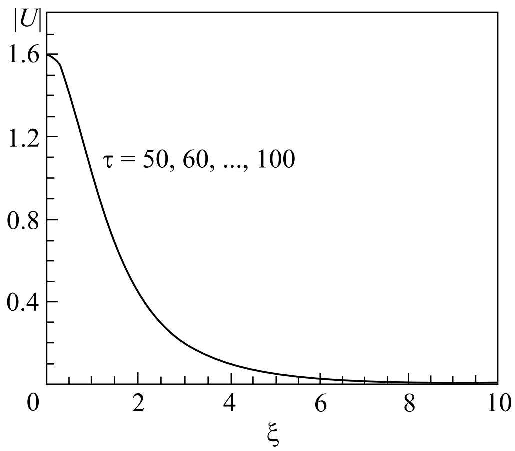

Рис.2. Профиль решения $|U|$ на интервале $(0,10)$, полученный численно в работе [9], при значении $|U(0)|=1.6$

уравнения Шредингера. Семейство решений содержит как коллапсирующее за конечное время решение, так и решения, приводящие к сжатию до малого, но конечного размера с последующим расширением. Показано, что решение Таланова лежит на сепаратрисе, разделяющей области коллапса и обычного регулярного поведения.

Из уравнения (18) следует, что полная энергия ϵ стационарного состояния (2) равна нулю:

$$\epsilon = \frac{1}{2}\int d^2r\{|\nabla\tilde{\psi}|^2 - \frac{1}{2}|\tilde{\psi}|^4\} = 0.$$

При использовании нелинейного уравнения Шредингера с притяжением в задачах физики твердого тела необходимо иметь в виду, что это уравнение является приближенным и выводится в некоторых предположениях, которые и определяют его область применимости. Во всяком случае степень сжатия, определяемая параметром $\lambda(t)^{-1}$, не может быть бесконечной и ограничена сверху. Само ограничение зависит от конкретной физической задачи.

Работа одного из авторов (Ю.Н.О.) поддержана CRDF (USA), грант # RP1-2251, а также Российским фондом фундаментальных исследований грант # 00-02-17729.

1. V. I. Talanov, JETP Lett. **11**, 199 (1971).
2. V. E. Zakharov, ZhETP **62**, 1746 (1972); JETP **35**, 908 (1972).
3. G. M. Fraiman, JETP **61**, 228 (1985).
4. M. J. Landman, G. C. Papanicolaou, C. Sulem, and P. L. Sulem, Phys. Rev. **A38**, 3837 (1988).
5. A. I. Smirnov and G. M. Fraiman, Physica **D52**, 2 (1991).
6. D. Pelinovskii, Physica **D119**, 301 (1998).
7. G. Perelman, CRM Proc. and Lecture Notes **27**, 147 (2001).
8. Yu. N. Ovchinnikov and I. M. Sigal, JETP **89**, 35 (1999).
9. Catherine Sulem and Pierre-Louis Sulem, *The Nonlinear Schrödinger Equation Self-Fucusing and wave Collapse*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1999.