Письма в ЖЭТФ, том 74, вып. 4, с. 224 – 228

О граничных условиях к уравнениям Гинзбурга–Ландау на поверхности раздела двух сверхпроводников с разными температурами перехода

Е. А. Шаповал

Всероссийский научно-исследовательский институт метрологической службы, 117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 20 июня 2001 г.
После переработки 13 июля 2001 г.

На основе микроскопической теории сверхпроводимости БКШ обобщенным методом Винера–Хопфа получены эффективные граничные условия к уравнениям Гинзбурга—Ландау на поверхности раздела двух сверхпроводников (включая необычные) с разными температурами перехода при отсутствии отражения на границе. Оказывается, что согласно этим условиям параметр порядка и его производная испытывают на поверхности раздела скачок.

PACS: 74.20.-z, 74.50.+r

Вывод граничных условий к уравнениям Гинзбурга – Ландау для обычных сверхпроводников на основе микроскопической теории сверхпроводимости рассматривался в работах де Женна [1] и Зайцева [2]. Условия на границе с вакуумом (диэлектриком) для анизотропных сверхпроводников (включая необычные сверхпроводники с d-симметрией параметра порядка) были получены автором [3, 4]. За последние годы появился ряд работ, в которых рассматривались условия на границе необычных сверхпроводников с диэлектриком и металлом без учета межэлектронного взаимодействия в последнем, то есть с нулевой температурой перехода [5 – 7]. Здесь будут рассмотрены эффективные граничные условия к уравнениям Гинзбурга – Ландау (ГЛ) при любом соотношении температур сверхпроводящего перехода контактирующих металлов, но в отсутствие потенциального барьера, что позволяет точно решить интегральное уравнение задачи методом Винера – Хопфа (ВХ).

Эффективные граничные условия к уравнениям ГЛ определяются из линеаризованного уравнения для параметра упорядочения $\Delta^*(\mathbf{p}_f, \mathbf{r})$ вблизи температуры сверхпроводящего перехода:

$$\Delta^*(\mathbf{p},\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}',\mathbf{p}''} V(\mathbf{p}-\mathbf{p}'') \times$$
$$\times \int d\mathbf{r}' \Delta(\mathbf{p}',\mathbf{r}') \pi T \sum_{\omega} \Phi_\omega(\mathbf{r},\mathbf{p}'';\mathbf{r}',\mathbf{p}'), \qquad (1)$$

где $\mathbf{p}$ – ферми-векторы, определяющие зависимость параметра порядка от направления, суммирование по ним означает на самом деле интегрирование по поверхности Ферми с учетом локальной плотности состояний, V – потенциал взаимодействия электронов, ω – мацубаровские частоты, а функции Φ_ω определяются через функции Грина в нормальном состоянии

$$\Phi_\omega(\mathbf{r},\mathbf{p};\mathbf{r}',\mathbf{p}') =$$
$$= \sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} G_\omega(\mathbf{p}'+\mathbf{q}'/2, \mathbf{p}+\mathbf{q}/2) \times$$
$$\times G_{-\omega}(-\mathbf{p}'+\mathbf{q}'/2, -\mathbf{p}+\mathbf{q}/2) \exp i(\mathbf{q}'\mathbf{r}' - \mathbf{q}\mathbf{r}). \qquad (2)$$

Потенциал межэлектронного взаимодействия можно разложить по системе взаимно ортогональных, нормированных на поверхности Ферми функций:

$$V(\mathbf{p}-\mathbf{p}') = \sum_{\lambda} \lambda \phi_\lambda(\mathbf{p}) \phi_\lambda(\mathbf{p}'), \qquad (3)$$

где положительные λ соответствуют притяжению. Вблизи температуры перехода в приближении слабой связи можно ограничиться главным членом этого разложения, соответствующим максимальному значению λ [8], тогда параметр упорядочения $\Delta^*(\mathbf{p},\mathbf{r}) = \Delta(\mathbf{r})\phi_\lambda(\mathbf{p})$.

Предположим, что поверхность раздела расположена при $x = 0$, тогда все величины, входящие в интегральное уравнение (1), зависят лишь от координаты x, и это уравнение принимает вид

$$\Delta(x) = \lambda(x)\nu(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x,x')\Delta(x')\,dx, \qquad (4)$$

где ν – плотность состояния на поверхности Ферми, а

$$K(x,x') = \pi T \sum_{\omega} \Phi_\omega(x,x'). \qquad (5)$$

Для однородного сверхпроводника, когда Φ_ω зависит лишь от разности координат,

$$\Phi_\omega(x-x') = \left\langle \frac{\phi^2(\mathbf{p})}{|v_x(\mathbf{p})|} \exp\left(-2\frac{|\omega||x-x'|}{|v_x(\mathbf{p})|}\right)\right\rangle, \quad (6)$$

где угловые скобки означают усреднение по поверхности Ферми, а $v_x(\mathbf{p})$ – проекция ферми-скорости на ось x при этом усреднении [3, 4].

В частности, при изотропной поверхности Ферми для трехмерного сверхпроводника

$$\Phi_\omega(x) = \frac{1}{v_f}\int_0^1 \exp\left(\frac{-2|\omega x|}{v_f\eta}\right)\frac{d\eta}{\eta}, \quad (7)$$

для двухмерного

$$\Phi_\omega(x) = \frac{2}{\pi v_f}\int_0^{\pi/2} \exp\left(\frac{-2|\omega x|}{v_f\cos\theta}\right)\frac{\phi^2(\theta)}{\cos\theta}\,d\theta, \quad (8)$$

для одномерного

$$\Phi_\omega(x) = \frac{1}{v_f}\exp\left(-\frac{2|\omega x|}{v_f}\right), \quad (9)$$

где v_f – ферми-скорость, а функция $\phi^2(\theta) = 1$, $2\cos^2 2\theta$, $2\sin^2 2\theta$ для s-, $d_{x^2-y^2}$- и d_{xy}-сверхпроводников, соответственно.

Предположим, что отражение электронов от поверхности раздела отсутствует справа от нее, при $x>0$, константа эффективного взаимодействия электронов равна λ_1, а слева, при $x<0$, равна λ_2, при этом $\lambda_1 > \lambda_2$. Тогда соответствующие температуры сверхпроводящего перехода $T_{c1} > T_{c2}$, так что при рассматриваемой температуре $T = T_{c1}$ металл слева находится в нормальном состоянии.

Введем волновую функцию куперовских пар, связанную с аномальной функцией Грина в методе Горькова:

$$f(\mathbf{r}) = T\sum_\omega F_\omega(\mathbf{r},\mathbf{r}) = \Delta^*(\mathbf{r})/\lambda(\mathbf{r}). \quad (10)$$

Эта функция, в отличие от обычного параметра порядка, может отличаться от нуля и в нормальном металле при $\lambda = 0$, описывая проникновение в него куперовских пар из соседнего сверхпроводника. Используя эту функцию, уравнение (4) можно представить в виде обобщенного уравнения ВХ

$$f(x) = \lambda_1\nu\int_0^\infty K(x-x')f(x')\,dx' + \\ + \lambda_2\nu\int_{-\infty}^0 K(x-x')f(x')\,dx'. \quad (11)$$

Представив функцию пар в виде суммы двух функций, $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$, отличных от нуля соответственно справа и слева от поверхности раздела, и проводя затем преобразование Фурье, получаем

$$(1-\lambda_1\nu K(k))\,f^+(k) + (1-\lambda_2\nu K(k))\,f^-(k) = 0. \quad (12)$$

Функции $f^\pm(q)$ аналитичны соответственно в нижней и верхней полуплоскостях комплексной плоскости q и в то же время аналитичны в некоторой общей полосе вдоль действительной оси, удовлетворяя таким образом условиям ВХ.

Рассмотрим прежде всего простой случай, когда $\lambda_2 = 0$, тогда уравнение (11) сводится к обычному уравнению ВХ. Эффективные граничные условия можно найти из решения этого уравнения вдали от поверхности раздела при $T_{c1} = T$, которое связано с константой взаимодействия уравнением БКШ:

$$\ln(2\gamma\omega_D/\pi T) = 1/\lambda\nu. \quad (13)$$

Тогда решение уравнения ВХ при $x>0$ будет иметь вид $f^+(x) \propto b + x +$ члены, экспоненциально убывающие на расстояниях порядка $\xi_0 = v_f/2\pi T$. Определяющая эффективные граничные условия длина экстраполяции b равна

$$\frac{b}{\xi_0} = \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{2}{q^2} - \frac{R'(q)}{qR(q)}\right)\frac{dq}{2\pi}. \quad (14)$$

Здесь мы ввели безразмерные импульсы $q = \xi_0 k$, а $R(q) = 1 - \lambda\nu K(q)$. Эта формула была получена Зайцевым [2] в частном случае изотропного трехмерного сверхпроводника. Ниже будет приведен простой метод ее доказательства. Для рассматриваемых симметрий параметра порядка из уравнения (5) находим, что для трехмерного сверхпроводника

$$\frac{R(q)}{\lambda\nu} = \frac{i}{2q}\ln\frac{\Gamma(1/2+iq/2)}{\Gamma(1/2-iq/2)} + \psi(1/2),$$

для двумерного

$$\frac{R(q)}{\lambda\nu} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\phi^2(\theta)[\psi(1/2) - \\ - \operatorname{Re}\psi(1/2 + iq\cos\theta/2)]d\theta, \quad (15)$$

для одномерного

$$\frac{R(q)}{\lambda\nu} = \psi(1/2) - \operatorname{Re}\psi(1/2+iq/2).$$

Используя формулу (14), находим длины экстраполяции для рассматриваемых сверхпроводников в единицах ξ_0: $b/\xi_0 = 0.916$; 0.754; 0.814; 0.696; 0.620

для одномерных, s-, $d_{x^2-y^2}$-, d_{xy}-двухмерных и трехмерных, соответственно. Небольшое расхождение с результатом Зайцева [2] для трехмерных сверхпроводников связано с бурным развитием за последние десятилетия вычислительной техники.

Рассмотрим теперь случай $\lambda_2 \neq 0$, когда слева от границы раздела находится сверхпроводящий металл с температурой перехода $T_{c2} < T$. Тогда можно показать, что при этом решение обобщенного уравнения ВХ (11) приводит к выражению для длины экстраполяции, аналогичному (14):

$$\frac{b}{\xi_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{q^2} - \frac{R'(q)}{qR(q)} + \frac{R_2'(q)}{qR_2(q)} \right) \frac{dq}{2\pi}, \tag{16}$$

где $R_2(q) = 1 - \nu\lambda_2 K(q) = 1 - (1 - R(q))\,\lambda_2/\lambda$. Тогда уравнение (16) принимает вид

$$\frac{b}{\xi_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{q^2} - \frac{R'(q)}{q} \left(\frac{1}{R(q)} - \frac{1}{R(q) + \lambda\nu \ln(T/T_{c2})} \right) \right] \frac{dq}{2\pi}. \tag{17}$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$1/\lambda_2\nu - 1/\lambda\nu = \ln(T/T_{c2}). \tag{18}$$

Зависимости приведенных длин экстраполяции от T_{c2}/T рассматриваемых здесь сверхпроводников с разной симметрией показаны на рис.1. В общих чертах они очень похожи. Сравнивая их с полученными выше результатами при $\lambda_2 = 0$, обратим внимание на резкий рост длины экстраполяции уже при очень малых T_{c2}/T, что указывает на необходимость учета взаимодействия электронов во втором металле даже при малых T_{c2}. Как следует из уравнения (17), при $T_{c2} \ll T$ длина экстраполяции $b(T_{c2}/T) = b(0) + b_1/\ln(T/T_{c2})$, где коэффициент b_1 равен

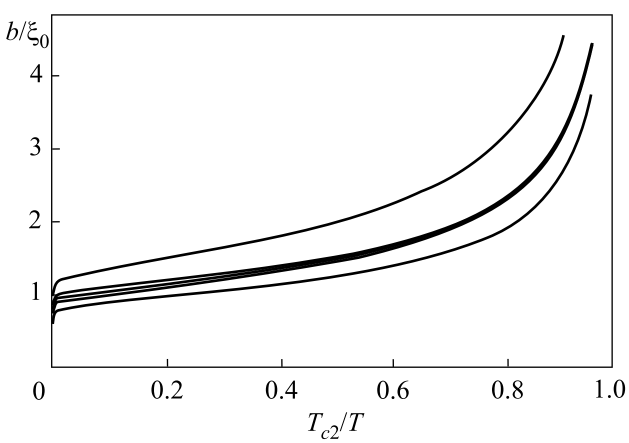

Рис.1. Зависимость относительной длины экстраполяции b/ξ_0 от относительной температуры перехода контактирующих сверхпроводников. Кривые сверху вниз: для одномерного сверхпроводника, для d_{xy}-, s-, $d_{x^2-y^2}$-двумерных, для трехмерного

$$\frac{b_1}{\xi_0} = \frac{1}{\lambda\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R'(q)\,dq}{2\pi q}. \tag{19}$$

Для рассматриваемых здесь сверхпроводников этот коэффициент равен 1.234, 0.785, 0.732 0.837 0.671, соответственно для одномерных, двухмерных ($s, d_{x^2-y^2}$ и d_{xy}) и трехмерных.

Когда $T_{c2} \to T$, длина экстраполяции растет. Таким же образом растет глубина проникновения куперовских пар во второй сверхпроводник. Когда температура перехода второго сверхпроводника T_{c2} оказывается в области температур вблизи рассматриваемой температуры T, но ниже ее ($0 < T - T_{c2} \ll T$), из уравнения (17) следует, что длина экстраполяции для первого сверхпроводника ($x > 0$) аналогична зависящей от температуры длины когерентности, входящей в уравнения ГЛ, но определяемой здесь температурой перехода второго сверхпроводника

$$b = \sqrt{\frac{7\zeta(3)}{4D(1 - T_{c2}/T)}}\,\xi_0 = \xi(|\tau_2|), \tag{20}$$

где D – размерность системы. Этой же величиной определяется в приближении ГЛ (то есть на расстояниях $|x| \gg \xi_0$) глубина проникновения куперовских пар в левый сверхпроводник при $x < 0$: $f(x) \propto \exp(x/b) +$ экспоненциально убывающие на расстояниях порядка ξ_0 члены.

Рассмотрим теперь случай, когда оба металла находятся в сверхпроводящем состоянии в области применимости уравнений ГЛ: $0 < \tau_{1,2} = \ln(T_{1,2}/T) \ll 1$. Тогда для решения уравнения ВХ (12) представим ядро $K(q)$ в виде

$$K(q) = \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{q^2 + a_n^2}, \quad K(0) = \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{a_n^2} = \frac{1}{\nu\lambda}. \tag{21}$$

Отсюда при $\lambda_{1,2} > \lambda$

$$R_{1,2}(q) = 1 - \nu\lambda_{1,2} K(q) = (q^2 - \alpha_{1,2}^2) \frac{\prod_{n=1}^{N-1} (q^2 + B_n^{(1,2)^2})}{\prod_{n=1}^{N} (q^2 + a_n^2)}, \tag{22}$$

где $B_n^{(1,2)} \geq 1$, а $\alpha_{1,2} \ll 1$. В таком виде $R_{1,2}(q)$ легко факторизуются

$$(q^2-\alpha_1^2)\prod_{n=1}^{N-1}\frac{q-iB_n^{(1)}}{q-iB_n^{(2)}}f^+(q)=$$

$$=-(q^2-\alpha_2^2)\prod_{n=1}^{N-1}\frac{q+iB_n^{(2)}}{q+iB_n^{(1)}}f^-(q)\propto 1;\ q. \qquad (23)$$

Отсюда получаем два линейно независимых решения в импульсном представлении и, перейдя в координатное представление, находим, в частности, что оба решения для волновой функции куперовских пар $f(x)=\Delta(x)/\lambda(x)$ непрерывны на поверхности раздела ($x=0$), при этом первое решение (условно "нечетное", так как становится таким при $\lambda_1=\lambda_2$) $f_1(0)= =0$, а второе (условно "четное", $f_2(x)=\partial f_1(x)/\partial x$) не равно нулю при $x=0$. Аналогичный результат был получен де Женном для "грязных" сверхпроводников [1], однако для рассматриваемых здесь чистых сверхпроводников эффективные граничные условия к уравнениям ГЛ определяются поведением $f(x)$ и $\Delta(x)$ на расстояниях $\xi_0\ll x\ll\xi(T)$ [1a, 2], что схематически иллюстрируется на рис.2.

Решения уравнения ВХ в области, где затухли экспоненциально убывающие на расстояниях порядка ξ_0 члены, связанные с полюсами в точках $\pm iB_n^{(1,2)}$, имеют вид

$$f_1^{\pm}(x)=\left(\prod_{n=1}^{N-1}\frac{B_n^{(1)}B_n^{(2)}+\alpha_{1,2}^2+i\alpha_{1,2}(B_n^{(2)}-B_n^{(1)})}{B_n^{(1,2)^2}+\alpha_{1,2}^2}\right)\times$$

$$\times\frac{\exp(i\alpha_{1,2}x)}{2i\alpha_{1,2}}+\text{к.с}\approx\left(\prod_{n=1}^{N-1}\frac{B_n^{(2,1)}}{B_n^{(1,2)}}\right)\left[\left(1+O(\alpha^4)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\sin\alpha_{1,2}x}{\alpha_{1,2}}+\alpha_{1,2}S\cos\alpha_{1,2}x\right];$$

$$|x|\gg\xi_0;\quad f_2^{\pm}(x)=\frac{\partial}{\partial x}f_1^{\pm}(x). \qquad (24)$$

Здесь для простоты координата x измеряется в единицах длины когерентности ξ_0, так что $\alpha_{1,2}= =\xi_0/\xi(\tau_{1,2})=\sqrt{4D\tau_{1,2}/7\zeta(3)}$, а

$$S=\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{B_n^{(2)}}-\frac{1}{B_n^{(1)}}\right)=$$

$$=(\tau_1-\tau_2)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{2\pi}\left[\frac{R'(q)}{qR^2(q)}-\frac{8D}{7\zeta(3)q^4}\right]. \qquad (25)$$

Этот же результат использован для оценки множителя перед синусом в уравнении (24), а входящий в уравнение (25) интеграл равен 0.030 для одномерных,

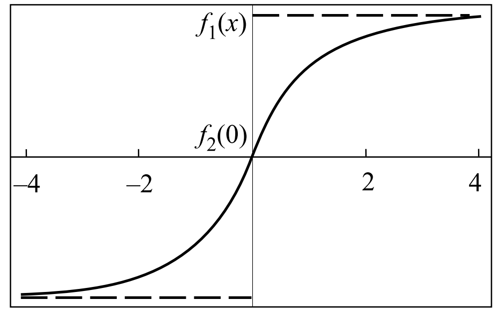

Рис.2. Сплошная кривая – результат микроскопического рассмотрения поведения волновой функции куперовских пар $f_2(x)=\partial f_1(x)/\partial x$ вблизи границы раздела ($|x|\ll\xi(T)$) двух сверхпроводников с разными температурами перехода. Штриховые прямые – ее асимптотическое поведение при $|x|\gg\xi_0$, определяющее эффективные граничные условия к макроскопическим уравнениям ГЛ

0.056, 0.076 и 0.085 для $d_{x^2-y^2}$-, s- и d_{xy}-двумерных, 0.126 для трехмерных сверхпроводников.

Из определения $R_{1,2}(q)$ (22) и $\tau_{1,2}=1/\nu\lambda-1/\nu\lambda_{1,2}$ следует, что

$$\frac{R_1(0)}{R_2(0)}=\frac{1-\lambda_1/\lambda}{1-\lambda_2/\lambda}=\frac{\lambda_1\tau_1}{\lambda_2\tau_2}=\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\prod_{n=1}^{N-1}\frac{B_n^{(1)^2}}{B_n^{(2)^2}}. \qquad (26)$$

Отсюда

$$\prod_{n=1}^{N-1}\frac{B_n^{(1)}}{B_n^{(2)}}=\sqrt{\frac{\lambda_1\tau_1/\alpha_1^2}{\lambda_2\tau_2/\alpha_2^2}}=\sqrt{\frac{\lambda_1(1-C\tau_1)}{\lambda_2(1-C\tau_2)}}. \qquad (27)$$

Чтобы получить последний результат, мы использовали второй член разложения $K(q)$ по импульсам, приводящий к тому, что

$$\tau_{1,2}=\frac{7\zeta(3)}{4D}\alpha_{1,2}^2-c\frac{31\zeta(5)}{32}\alpha_{1,2}^4, \qquad (28)$$

где $c=2/5,\ 3/4,\ 7/8,\ 5/8,\ 2$ для трехмерных, s-, $d_{x^2-y^2}$-, d_{xy}-двумерных и одномерных сверхпроводников, соответственно. Отсюда $C=31\zeta(5)/49\zeta^2(3)\times \times cD^2/2$. Пренебрежение этим членом приводит к тривиальному результату, равенству параметра порядка и его производной по обе стороны раздела, как если бы $\tau_1=\tau_2$. С другой стороны, если по сторонам раздела находятся различные металлы, то неизбежное отражение электронов от поверхности раздела приводит к граничным условиям, при которых поправка за счет разницы температур перехода оказывается во многих случаях пренебрежимо малой.

Из полученных для волновой функции куперовских пар результатов, учитывая ее связь с параметром порядка (10), находим искомые граничные условия к уравнениям ГЛ:

$$(1 - C\tau_1)\Delta_1 = (1 - C\tau_2)\Delta_2;$$
$$(1 - C\tau_1)\Delta_1' = (1 - C\tau_2)\Delta_2'. \quad (29)$$

В магнитном поле второе граничное условие получается, как обычно, заменой $\partial/\partial x \Longrightarrow \mathbf{n}(\nabla + 2ie\mathbf{A})$, где $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности раздела. Из (29) следует, что даже при отсутствии отражения от поверхности раздела эффективный параметр порядка и его производная испытывают на поверхности раздела скачок, пропорциональный разности температур перехода:

$$\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} = C\frac{\tau_1 - \tau_2}{2}; \quad \frac{\Delta_1' - \Delta_2'}{\Delta_1' + \Delta_2'} = C\frac{\tau_1 - \tau_2}{2}. \quad (30)$$

Полученные граничные условия сохраняют силу при $T_{c2} < T < T_{c1}$, если второй сверхпроводник находится в области применимости уравнений ГЛ ($|1 - T_{c2}/T| \ll 1$), надо лишь иметь в виду, что тогда соответствующее τ_2 отрицательно.

Полученные результаты согласуются с условием непрерывности тока, проходящего через поверхность раздела. В общем случае граничные условия на поверхности раздела двух сверхпроводников могут быть написаны в виде

$$\Delta_1 = M_{11}\Delta_2 + M_{12}\Delta_2', \quad \Delta_1' = M_{21}\Delta_2 + M_{22}\Delta_2'. \quad (31)$$

Если металлы по обе стороны границы одинаковы, за исключением их температуры сверхпроводящего перехода, то при любом коэффициенте прохождения расчет проходящего через границу тока показывает, что с точностью до членов порядка τ, пренебрежимых в других задачах,

$$M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = \sqrt{\frac{1 + C\tau_1}{1 + C\tau_2}}. \quad (32)$$

При $\tau_1 = \tau_2$, то есть равных температурах перехода, этот результат сводится к известному результату де Женна [1a].

Автор выражает благодарность Р.О.Зайцеву за полезное обсуждение и ценные замечания. Работа поддерживается Научным советом направления “Сверхпроводимость”, ГНТП “Актуальные направления физики конденсированных сред”.

1. P. G. de Gennes, Rev. Mod. Phys. **36**, 225 (1964). 1a. П. де Жен, *Сверхпроводимость металлов и сплавов*, М.: Мир, 1966.
2. Р. О. Зайцев, ЖЭТФ **48**, 664, 1759 (1965).
3. Е. А. Шаповал, ЖЭТФ **88**, 1073 (1985).
4. Е. А. Шаповал, Письма в ЖЭТФ **64**, 350 (1996).
5. M. Alber, B. Bauml, R. Ernst et al., Phys. Rev. **B53**, 5863 (1996).
6. D. F. Agterberg, J. Phys. Condens. Matter **9**, 7435 (1997).
7. J. Mannhaft and H. Hilgenkamp, Physica **C317-318**, 383 (1999).
8. В. Л. Покровский, ЖЭТФ **40**, 641 (1961).