

# Динамика самовоздействия сверхкоротких электромагнитных импульсов

А. Г. Литвак, В. А. Миронов, С. А. Скобелев<sup>1)</sup>

Институт прикладной физики РАН, 603950 Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 9 июня 2005 г.

После переработки 29 июня 2005 г.

Исследованы особенности динамики самовоздействия трехмерных волновых пакетов с шириной спектра порядка несущей частоты при достаточно общих предположениях относительно дисперсии среды. Найдено условие коллапса волнового поля. Численно исследованы режимы самовоздействия в среде без дисперсии и в средах с преобладающей аномальной или нормальной дисперсией групповой скорости. Показано, что для предельно коротких импульсов нелинейность приводит не только к самосжатию волнового поля, но и к “опрокидыванию” продольного профиля. В среде без дисперсии образование ударных фронтов внутри импульса приводит к нелинейной диссипации линейно поляризованного излучения и стабилизации самофокусировки. В случае циркулярно поляризованного излучения волновой коллапс сопровождается образованием ударной волны огибающей.

PACS: 41.20.Jb, 42.65.–k

Развитие оптических методов генерации аттосекундных [1] и терагерцовых [2] импульсов ставит проблему теоретического исследования динамики самовоздействия волновых полей с шириной спектра порядка несущей частоты. Приближение медленно меняющейся огибающей волнового поля оказывается недостаточным и для описания распространения ионизирующего фемтосекундного лазерного импульса в атмосфере, при котором возникает заметное уширение его спектра [3]. Одним из наиболее простых обобщений трехмерного и нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) для импульсов с длительностью в несколько периодов колебаний поля может служить следующее уравнение [4–6]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + 3u^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} - b \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) + au = \Delta_{\perp} u. \quad (1)$$

Оно описывает безотражательное распространение широкополосного излучения  $u(z, \tau = t - z, \mathbf{r})$  вдоль оси  $z$  с групповой скоростью,  $\mathbf{r}$  – вектор, перпендикулярный оси  $z$ . Параметры  $a$ ,  $b$  и  $\gamma$  определяют низкочастотную и высокочастотную дисперсии среды и диссипацию излучения [4]. Масштабная инвариантность этого уравнения позволяет представить его в виде (1). При этом безразмерные координаты записаны в соответствующих характерных (пространственных и временных) масштабах задачи. Поле  $u(\mathbf{r}, z, \tau)$  обезразмерено на характерное нелинейное поле. В отсутствие дисперсии среды ( $a = b = 0$ )

уравнение (1) описывает, в частности, самовоздействие сдвиговых акустических волновых полей [5]. В приложении к нелинейной акустике (1) представляет собой обобщение модифицированного уравнения Бюргера на случай неоднородных волновых полей. Для  $\gamma = 0$ ,  $a = 0$  (1) имеет вид обобщенного уравнения Кадомцева–Петвиашвили, которое используется для описания эволюции упругих волн конечной амплитуды в магнетиках [6].

В рассматриваемом нами случае электромагнитного излучения параметры  $a$  и  $b$  определяют дисперсию групповой скорости волнового поля в широком диапазоне частот [7]. Из линейного дисперсионного соотношения  $k = k_z(\omega)$  ( $k_z$  – волновое число,  $\omega$  – частота волны.  $u \sim \exp(i\omega t - ik_z z)$ ) для параметра дисперсии групповой скорости можно найти  $\partial^2 k / \partial \omega^2 = 6b\omega - 2a/\omega^3$ . Отсюда видно, что при  $a = 0$ ,  $b > 0$  уравнение (1) описывает динамику самовоздействия сверхкоротких импульсов в среде нормальной дисперсией ( $\partial^2 k / \partial \omega^2 > 0$ ). Другой предельный случай ( $b = 0$ ,  $a > 0$ ) соответствует среде с аномальной дисперсией ( $\partial^2 k / \partial \omega^2 < 0$ ). Выбором центральной частоты широкополосного излучения можно управлять ролью дисперсии в динамике системы. В частности, для центральной частоты  $\bar{\omega} = (a/3b)^{1/4}$  дисперсия групповой скорости оказывается равной нулю.

Другая отличительная особенность уравнения связана с нелинейным слагаемым в (1). При использовании метода медленно меняющихся амплитуд оно соответствует кубичной нелинейности. По

<sup>1)</sup>e-mail: sksa@ufp.appl.sci-nnov.ru

мере укорочения длительности импульса именно зависимость групповой скорости от амплитуды (нелинейная дисперсия) становится определяющей. В одномерном случае ( $\Delta_{\perp} = 0$ ) именно эта нелинейность определяет модификацию профиля волнового поля и образование ударных фронтов. Очевидно, что самосжатие волнового пакета в поперечном направлении приведет к усилению эффектов типа опрокидывания.

Особенности пространственно-временной эволюции неоднородных пакетов широкополосного излучения рассматриваются в данной работе. Сначала получен ряд аналитических соотношений, позволяющих качественно проанализировать характерные черты динамики самовоздействия волновых полей на основе уравнения (1), затем приведены результаты численного исследования.

1. Рассмотрим консервативный случай ( $\gamma = 0$ ) и перейдем от (1) к уравнению для "потенциала"  $\Phi$  поля  $u = \Phi_{\tau}$ . В результате для локализованного распределения  $\Phi$ , проинтегрировав (1), получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau} (\Phi_{\tau})^3 - b \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \tau^4} = \Delta_{\perp} \Phi - a \Phi, \quad (2)$$

более удобное для качественного исследования динамики пакета. Уравнению (2) можно сопоставить плотность функции Лангранжа

$$L = \frac{1}{2} \Phi_z \Phi_{\tau} + \frac{\Phi_{\tau}^4}{4} + \frac{b}{2} \Phi_{\tau\tau}^2 - \frac{1}{2} (\nabla_{\perp} \Phi)^2 - a \frac{\Phi^2}{2}, \quad (3)$$

что позволяет определить ряд интегральных соотношений, сохраняющихся в процессе эволюции системы:

$$I = \int \Phi_{\tau}^2 d\tau d\mathbf{r}_{\perp}, \quad (4)$$

$$H = \int \left( (\nabla_{\perp} \Phi)^2 - b \Phi_{\tau\tau}^2 - \frac{1}{2} \Phi_{\tau}^4 + a \Phi^2 \right) d\tau d\mathbf{r}_{\perp}. \quad (5)$$

Существование этих соотношений связано с трансляционной симметрией исходного уравнения ( $z \rightarrow z + z_0$ ,  $\tau \rightarrow \tau + \tau_0$ ). Они являются обобщением хорошо известных выражений для "энергии" (числа квантов) и гамильтониана в НУШ на случай широкополосного импульса.

Для качественного исследования динамики трехмерных волновых пакетов используем метод моментов. Исходным для дальнейшего рассмотрения является уравнение непрерывности

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right)^2 &= -3 \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\Phi_{\tau}^4}{2} + b \Phi_{\tau\tau}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla_{\perp} \Phi)^2 + \\ &+ b \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} \Phi_{\tau}^2 + 2 \operatorname{div}_{\perp} (\Phi_{\tau} \nabla_{\perp} \Phi) - a \frac{\partial \Phi^2}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (6)$$

Оно получается умножением (2) на  $2\Phi_{\tau}$  и последующим преобразованием к дивергентному виду. Одно из самых информативных соотношений можно получить для характерного поперечного размера аксиально симметричного волнового поля

$$\overline{\rho_{\perp}^2} = \frac{\int r_{\perp}^2 \Phi_{\tau}^2 d\tau d\mathbf{r}_{\perp}}{I}.$$

Умножая (2) на  $r_{\perp}^2$  и выполняя соответствующие операции, нетрудно найти уравнение

$$\frac{d^2 \overline{\rho_{\perp}^2}}{dz^2} = \frac{8H + 8 \int (b \Phi_{\tau\tau}^2 - a \Phi^2) d\tau d\mathbf{r}_{\perp}}{I}, \quad (7)$$

описывающее изменение эффективного поперечного размера волнового поля в процессе эволюции системы. В отсутствие низкочастотной дисперсии ( $a = 0$ ) уравнение такого типа получено ранее в [6].

Прежде всего, следует отметить, что для среды без дисперсии ( $a = b = 0$ ) правая часть пропорциональна гамильтониану системы (5) [5]. В этом случае можно сделать определенный вывод – распределения волнового поля, для которых  $H < 0$ , схлопываются в поперечном направлении. Правая часть (7) отрицательна и для начальных распределений, спектр которых расположен в области аномальной дисперсии групповой скорости ( $b \rightarrow 0$ ). Как и в случае квазимонохроматического импульса, здесь имеет место коллапс. Решение уравнения (2) существует на конечных трассах  $z_k$ , а для регуляризации возникающей особенности необходим учет дополнительных механизмов (насыщения нелинейности, нелинейного поглощения и др.). Столь однозначного вывода нельзя сделать для распределений, спектр которых сосредоточен в области нормальной дисперсии групповой скорости ( $a \rightarrow 0$ ). Для таких распределений можно сделать лишь определенный вывод относительно самосжатия на начальном этапе эволюции системы. В общем случае ( $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ) открываются более широкие, чем в случае квазимонохроматического волнового пакета, возможности усиления нелинейности, которые требуют более детального исследования. Одна из них, например, связана с выбором центральной частоты излучения так, чтобы параметр дисперсии групповой скорости ( $\partial^2 k_z / \partial \omega^2 = 0$ ) обратился в нуль. Другую возможность можно установить из (7). Видно, что для распределений поля, спадающих по закону  $\exp(-\sqrt[4]{(a/b)|\tau|})$ , интегральное слагаемое в (7) обращается в нуль. Таким образом для начальных распределений, содержащих набор областей с такими изменениями поля, гамильтониан (5) оказывается таким же, как в среде без дисперсии.

2. Для иллюстрации особенностей динамики самовоздействия сверхкоротких импульсов приведем

результаты численного моделирования процессов в системе на основе уравнения (1).

Сначала рассмотрим самый простой случай среды без дисперсии ( $a = b = 0$ ). На рис.1а представлена

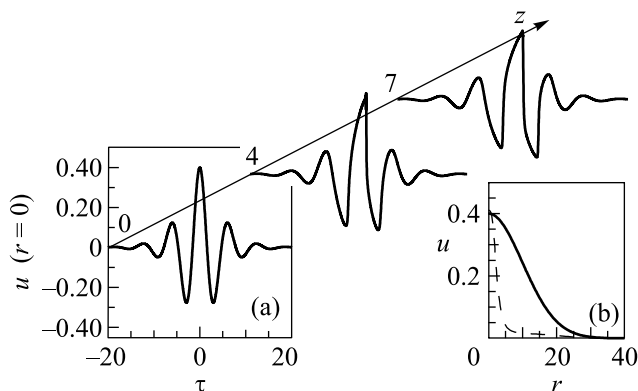


Рис.1. Динамика линейно поляризованного поля в среде без дисперсии ( $a = 0, b = 0$ ). (а) Эволюция продольной структуры волнового пакета ( $r = 0$ ). (б) Зависимость  $u$  от поперечной координаты (сплошная кривая – начальное распределение, штриховая кривая соответствует  $z = 4$ )

$$u = 0.4 \frac{\cos(\tau)}{\cosh(0.3\tau)} \exp\left(-\frac{r^2}{200}\right)$$

эволюция поля на оси системы. Видно, что основным процессом является укрупнение профиля волнового поля внутри каждой половины периода и образование ударных волн. В отличие от квадратичной нелинейности, в рассматриваемой “кубичной” среде происходит формирование не пилообразного, а трапециевидного профиля. Поглощение на ударных фронтах оказывается настолько сильным, что амплитуда волны остается практически неизменной. При этом ширина волнового поля заметно уменьшается (см рис.1б). Для интерпретации полученных результатов естественно воспользоваться тем обстоятельством, что в рассматриваемом случае среды без дисперсии длительность импульса не меняется. Это означает, что процессы происходят локально, так же, как в квазимонохроматическом волновом пучке. В нелинейном слагаемом можно выделить две части. Одна из них соответствует кубичной нелинейности, которая в консервативном режиме приводит к самосжатию волнового пакета по тому же закону (7), что в теории самофокусировки. Другая определяет нелинейное поглощение, связанное с опрокидыванием профиля и образованием многочисленных ударных фронтов. Очевидно, что для волновых пучков с характерным поперечным размером, много большим длины волны, процесс самофокусировки оказывается достаточно медленным по сравнению с темпом образова-

ния ударной волны на каждой половине периода поля [5]. Величину нелинейного поглощения в рассматриваемом случае можно найти, как для одномерных слабых ударных волн в гидродинамике [5, 8]. В результате аддитивного учета действия этих нелинейностей, очевидно, приходим к НУШ:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \Delta_{\perp} \psi + |\psi|^2 \psi + i\nu |\psi|^2 \psi = 0$$

с дополнительным слагаемым, описывающим нелинейную диссипацию излучения. Численное решение этого уравнения, как и расчеты соответствующего уравнения в так называемом безабберационном приближении [5], показывают заметное поперечное самосжатие волнового поля в условиях практически постоянного значения поля на оси системы. Таким образом, поглощение сверхкоротких импульсов линейно поляризованного излучения на внутренних ударных волнах принципиально меняет характер коллапса волнового пакета – он протекает без усиления поля.

3. Образование многочисленных ударных фронтов сильно затрудняет численное моделирование долговременной эволюции системы. Задача упрощается в случае циркулярно поляризованных волн  $\mathbf{u} = u(\mathbf{x}_0 + i\mathbf{y}_0)$  ( $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$  – единичные векторы вдоль соответствующих осей). Обобщение (1) для волнового поля с круговой поляризацией приводит к следующему уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \tau} |u|^2 u - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \beta |u|^6 u - b \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} \right) = \Delta_{\perp} u - au. \tag{8}$$

Оно может быть получено на основе одномерного уравнения в [9], описывающего динамику самовоздействия векторного поля в среде с кубичной нелинейностью. Для широкого волнового пучка, добавляя слагаемое  $\Delta_{\perp} u$ , приходим к (8). Кроме того в (8) дополнительно введена нелинейная диссипация ( $\beta \neq 0$ ) для стабилизации коллапса. В квазимонохроматическом поле она описывает многофотонное поглощение.

На рис.2 приведены результаты численного моделирования динамики самовоздействия циркулярно поляризованного волнового поля в среде без дисперсии и теми же параметрами, что и на рис.1. В этом случае, как нетрудно видеть, укрупнения профиля полупериодов поля не происходит и, следовательно устраняется возможность диссипации поля в области ударных фронтов. В результате на основе трансформированного для случая циркулярно поляризованной волны соотношения ( $\gamma = 0, \beta = 0$ ) (7) можно сделать вывод не только об уменьшении (до нуля) эффективной ширины волнового поля, но и неограниченном возрастании амплитуды, как при обычном коллапсе.

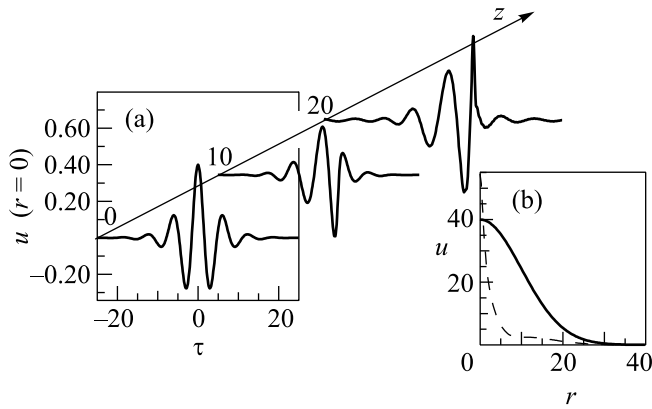


Рис.2. Динамика циркулярно поляризованного поля в среде без дисперсии ( $a = 0$ ,  $b = 0$ ). (а) Эволюция продольной структуры ( $r = 0$ ). (б) Зависимость поля с максимальной амплитудой от поперечной координаты (сплошная кривая – начальное распределение, штриховая кривая соответствует  $z = 20$ )  $u = \frac{0.4}{\cosh(0.3\tau)} \exp\left(-\frac{r^2}{200}\right) [\cos(\tau) + i \sin(\tau)]$

Результаты численного исследования динамики самовоздействия при начальных условиях, практически таких же, что и для линейно поляризованной волны, подтверждают сделанный выше вывод (см. рис.2). Для стабилизации особенности в уравнение было введено дополнительное слагаемое, учитывающее нелинейное поглощение. Новым результатом здесь является и укрупнение профиля огибающей. Оно связано с зависимостью групповой скорости от амплитуды волнового пакета. Характерно выделение вблизи переднего фронта пакета предельно короткого импульса с длительностью, существенно меньшей длины волны, соответствующей центральной частоте. Этот эффект есть и в одномерной задаче ( $\Delta_{\perp} = 0$ ). В рассматриваемом трехмерном случае длина формирования такой структуры заметно уменьшается. Самофокусировка волнового поля приводит дополнительно к существенному увеличению амплитуды поля, так что укрупнение профиля огибающей и образование ударного фронта проявляются для начальных амплитуд, значительно меньших, чем в одномерном случае.

В среде с преобладающей аномальной дисперсией групповой скорости ( $b \rightarrow 0$ ) динамика самовоздействия циркулярно поляризованного волнового поля для параметров, при которых реализуется коллапс ( $H < 0$ ), протекает практически так же, как в квазимонохроматическом случае. Поскольку дисперсионное расплывание сверхкоротких (и предельно коротких) импульсов оказывается заметным эффектом, са-

мосжатие в поперечном направлении происходит при монотонном увеличении продольного размера.

Более заметны отличия в картине самовоздействия в среде с преобладающей нормальной дисперсией групповой скорости ( $a \rightarrow 0$ ). При выбранном нами начальном распределении (см. рис.3) имеет место за-

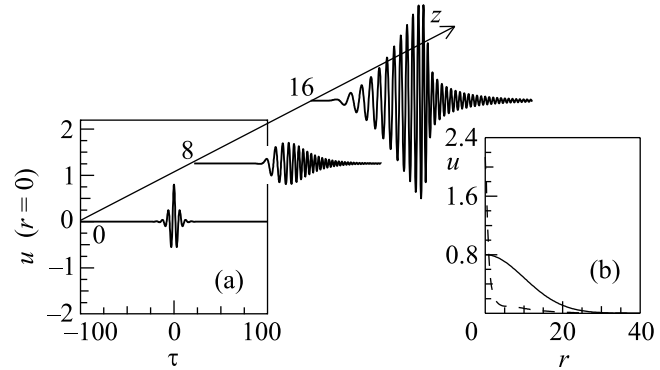


Рис.3. Динамика циркулярно поляризованного поля в среде с нормальной дисперсией. (а) Эволюция волнового поля на оси системы ( $r = 0$ ). (б) Распределение поля с максимальной амплитудой от поперечной координаты (сплошная кривая – начальное распределение, штриховая кривая соответствует  $z = 16$ ),  $a = 0$ ,  $b = 1$   $u = \frac{0.8}{\cosh(0.3\tau)} \exp\left(-\frac{r^2}{200}\right) [\cos(\tau) + i \sin(\tau)]$

метное самосжатие волнового поля по поперечной координате, которое приходилось стабилизировать учетом нелинейного (многофотонного) поглощения.

Видно отсутствие характерного для квазимонохроматического волнового пакета дробления распределения в продольном направлении пополам. Именно с развитием неустойчивости дробления связывают ограничение максимальной амплитуды и стабилизацию коллапса [10]. Нелинейная дисперсия приводит к нарушению симметрии процесса самосжатия. В результате с ростом максимальной амплитуды происходит характерное укрупнение заднего фронта импульса и образование ударной волны огибающей. Аналогичная картина имеет место и в рамках НУШ при учете зависимости групповой скорости волнового пакета от амплитуды [11]. Таким образом, дисперсионное расплывание пакета не останавливает его поперечного самосжатия (коллапса), протекающего одновременно с формированием резкого ударного фронта продольной огибающей.

В работе мы кратко остановились на рассмотрении особенностей в пространственно-временной эволюции электромагнитного излучения с шириной спектра порядка несущей частоты. На основе уравнения для эффективной ширины волнового поля уда-

ется выделить класс начальных распределений, которые в дальнейшем испытывают коллапс. Численное исследование показало, что этот процесс протекает не столь универсально, как в случае квазимонохроматического излучения. Лишь в среде с преобладающей аномальной дисперсией групповой скорости наблюдаемая картина аналогична реализуемой в случае кубической нелинейности. В остальных случаях ситуация оказалась существенно более сложной. Так, в случае линейно поляризованного излучения в среде без дисперсии существенную роль в динамике самовоздействия играет нелинейное затухание на ударных фронтах, которые возникают при укрупнении волнового профиля внутри каждого полупериода поля. В результате фокусировка волнового поля в поперечном направлении компенсируется поглощением и происходит без заметного увеличения амплитуды.

Для циркулярно поляризованных волновых полей рассматриваемая нелинейность приводит как к увеличению амплитуды поля, так и к образованию ударной волны огибающей, то есть одновременно имеют место и коллапс и градиентная катастрофа.

Авторы признательны А. А. Балакину и Д. И. Кулагину за помощь в составлении численного кода и Д. В. Карташову за интерес к работе и обсуждение ее результатов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты # 04-02-16420, # 05-02-17517, # 05-02-17509). Один из авторов (С.С.) также благодарен "Фонду содействия отечественной науке" и фонду "Династия".

1. P. M. Paul, E. S. Toma, P. Breger et al., *Science* **292**, 1689 (2001); A. Baltuska, Th. Udem, M. Uiberacher et al., *Nature* **421**, 611 (2003).
2. Qin Chen and X. C. Zhang, in *Ultrafast Lasers: Technology and Applications*, Eds. M. E. Femann, A. Golvanauskas, and G. Sucha, Marcel Dekker, New York, 2003; R. A. Cheville and D. Grischkowsky, *Appl. Phys. Lett.* **67**, 1960 (1995).
3. A. Braun, G. Korn, X. Liu et al., *Opt. Lett.* **20**, 73 (1995); E. T. J. Nibbering, P. F. Curley, G. Grillion et al., *Opt. Lett.* **21**, 62 (1996).
4. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, *Письма в ЖЭТФ* **53**, 188 (1991); С. А. Козлов, С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **111**, 404 (1997).
5. О. В. Руденко, О. А. Сапожников, *УФН* **174**, 970 (2004), *ЖЭТФ* **106**, 395 (1994).
6. С. К. Турицын, Г. Е. Фалькович, *ЖЭТФ* **89**, 258 (1985); В. С. Львов, *Нелинейные спиновые волны*, М.: Наука, 1987.
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, М.: Наука, 1982.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, М.: Наука 1986.
9. Д. В. Карташов, А. В. Ким, С. А. Скобелев, *Письма в ЖЭТФ* **78**, 722 (2003).
10. Н. А. Жарова, А. Г. Литвак, Т. А. Петрова и др., *Изв. вузов, Радиофизика* **29**, 1137 (1986); L. Berge, *Phys. Rep.* **303**, 259 (1998).
11. Н. А. Жарова, А. Г. Литвак, В. А. Миронов, *Изв. вузов, Радиофизика* **46**, 331 (2003).