

## О СПЕКТРАЛЬНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЭЛЕЙ-ТЕЙЛОРОВСКОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

А.М.Опарин, Н.А.Иногамов<sup>+</sup>, А.Ю.Демьянов<sup>\*</sup>

Институт автоматизации проектирования РАН  
123056 Москва, Россия

<sup>+</sup>Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН  
142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

<sup>\*</sup>Московский физико-технический институт  
141700 Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 28 сентября 2000 г.

Рассматривается динамика турбулентного перемешивания, вызванного неустойчивостью Рэлея – Тейлора. Слой перемешивания состоит из одного горизонтального ряда крупных структур. Характеристики этих структур изучены спектральными и статистическими методами. Исследована стимуляция перемешивания длинноволновыми шумами. Показано, что в случае типичных однородных шумов, не имеющих выделенных масштабов, автомодельность  $h \propto t^2$  сохраняется. Найдена пороговая амплитуда случайных широкодиапазонных шумов, ниже которой такими шумами можно пренебрегать. Изучено торможение перемешивания боковыми границами. Эффекты стимуляции и торможения заметно влияют на коэффициент перемешивания  $\alpha_+$  в сторону его повышения и понижения, соответственно.

PACS: 47.20.Вр, 47.27.Еq

В работе рассматривается неустойчивость границы, отделяющей находящееся сверху тяжелое вещество от подстилающего легкого (неустойчивость Рэлея – Тейлора, см. обзоры в [1–5]). Неустойчивость важна в астрофизике, например, в задаче о фрагментации сверхновых [6], и физике высоких плотностей энергии в задачах об импульсных магнитных генераторах [5], инерционном синтезе [2, 4] и др. В работе приводятся результаты теоретического анализа многочисленных вычислительных экспериментов, “отслеживающих” развитие турбулентности на подробных разностных сетках. Проанализирована большая серия расчетов, в которых варьировались размеры сеток  $N_x \times N_z$ , отношение плотностей контактирующих легкого и тяжелого веществ  $\mu = \rho_l/\rho_h$ , начальные данные, число Маха и другие параметры, влияющие на процесс перемешивания. Постановка вычислительного эксперимента основана на математической модели сжимаемой невязкой многокомпонентной среды. Численно моделируются законы сохранения (полная система уравнений Эйлера) [7–10]. В расчетах использовались метод крупных частиц [7, 8] и квазимонотонный гибридный сеточно-характеристический метод [8–10], традиционно привлекаемые для моделирования гидродинамических неустойчивостей.

Актуальная проблема турбулентного перемешивания рассматривается в ряде работ [11–22]. Обычно основное внимание уделяется вертикальному профилю  $\bar{\rho}(z) = \langle \rho \rangle_{\perp}$ , полученному усреднением по поперечным координатам (знак  $\perp$ ). По нему

находятся коэффициенты перемешивания  $\alpha_+$  и асимметрии<sup>1)</sup>  $As = \alpha_+/\alpha_-$ . При поперечном усреднении нивелируется важная численная информация о доминирующих структурах, ответственных за динамику перемешивания. В работах, где рассматриваются спектры и поперечная структура, ограничиваются, во-первых, констатацией укрупнения этих структур<sup>2)</sup> и, во-вторых, изучением короткомасштабной асимптотики спектра. На современном этапе качественной констатации недостаточно. В данной работе, во-первых, предлагается подход, позволяющий количественно описать укрупнение. Он заключается в построении спектров величин  $f = \{\rho, u, w, p\}$  в автомодельных переменных  $\tilde{f}_n$  по численным данным, где  $\rho, u, w, p$  – плотность, горизонтальная и вертикальная скорости, давление, соответственно. Во-вторых, исследование короткомасштабной асимптотики, существенной для выяснения вопросов о тонкости (дисперсности) перемешивания и колмогоровской диссипации, дополняется исследованием длинноволновой области. Это важнейший вопрос, поскольку именно длинноволновые амплитуды определяют темп расширения слоя перемешивания и, следовательно, коэффициенты  $\alpha_{\pm}$ .

Слой перемешивания имеет выраженную горизонтальную структуру (рис.1). Наблюдаются соседствующие колонки тяжелого и легкого веществ (струи и пузыри). Тяжелые колонки более темные. Степень серости пропорциональна плотности. Направление движения преимущественно вертикальное. Тяжелое вещество в основном опускается, а легкое всплывает.

В варианте, показанном на рис.1, сетка составляет  $N_x \times N_y = 600 \times 1500$  узлов, ячейки квадратные. Ширина расчетной области  $L_{\perp} = 2\pi$ , ускорение  $g = 1$ , отношение плотностей  $\mu = 0.1$ . При  $t = 0$  задавалось короткомасштабное возмущение в виде приповерхностного поля скоростей:

$$v = -\nabla\varphi, \quad \varphi = \sum \varphi_n, \quad \varphi_n = \text{sign } z(a_n^0 \cos nx + b_n^0 \sin nx) \exp(-n|z|)/n, \quad (1)$$

где  $n$  – номер гармоники,  $n = 50 \div 100$ . При  $t = 2 \div 3/\sqrt{At}$  переходная стадия заканчивается и устанавливается автомодельный режим. Существование переходной стадии обусловлено неавтомодельностью начальных данных.

В автомодельном режиме и вертикальные, и горизонтальные размеры пропорциональны  $t^2$  и изменяются подобно. Кадры на рис.1 отмасштабированы с использованием этого подобия. Поэтому структуры во всех кадрах на рис.1 имеют примерно одинаковые геометрические размеры. Это позволяет отвлечься от укрупнения ячеек и сосредоточиться на выявлении типичных ячеек и их подструктуры. Фазовая составляющая обновляется от кадра к кадру, поскольку за соответствующий интервал времени размеры структур существенно увеличиваются. За основу взят верхний кадр на рис.1,  $t = 3$ . Для каждого момента времени (кадра) найдены значения

<sup>1)</sup> Слой перемешивания в неподвижной на бесконечности несжимаемой среде ограничен сверху и снизу фронтами или границами перемешивания, распространяющимися в тяжелой и легкой жидкостях, соответственно. Полная толщина слоя  $h$  состоит из суммы  $h_+$  +  $h_-$  перемещений верхнего (+) и нижнего (-) фронтов от плоскости невозмущенного положения границы раздела сред. В автомодельном случае записывают  $h_{\pm} = \alpha_{\pm} At g t^2$ , где  $At = (1 - \mu)/(1 + \mu)$ ,  $g$  – ускорение. Отсюда следуют определения коэффициентов  $\alpha_{\pm}$  и  $As$ .

<sup>2)</sup> Это явление было предсказано теоретически [13, 23]. В [23] выведена автомодельная формула  $\bar{\lambda} \sim t^2$ , определяющая скейлинг поперечных размеров доминирующих структур, от которых зависит ускорение верхнего фронта.

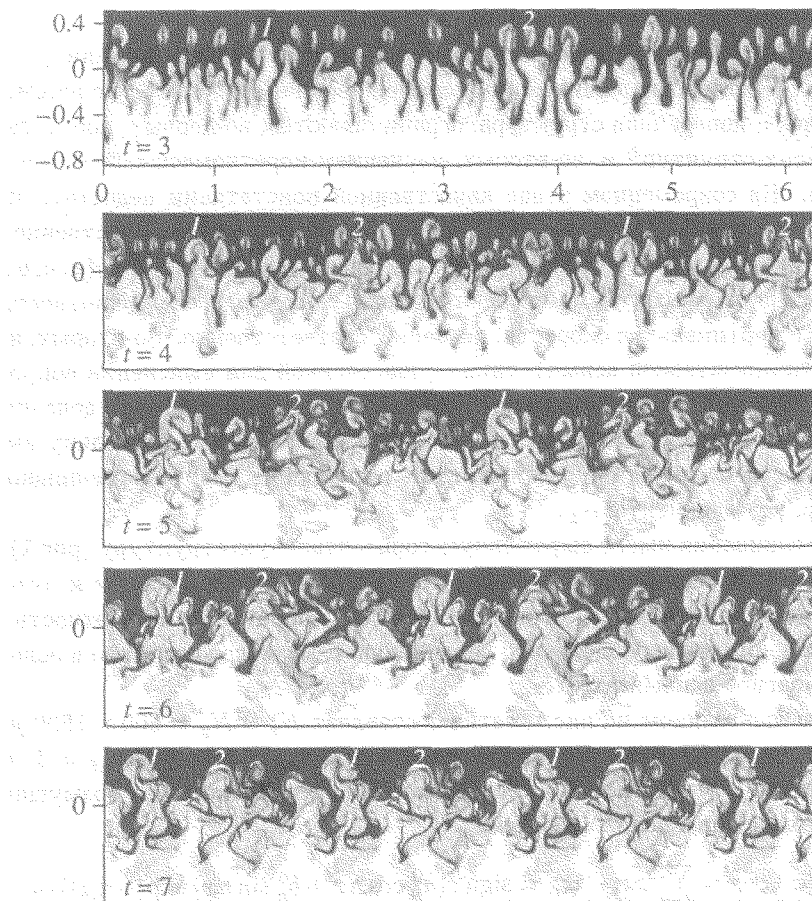


Рис.1. Типичная структура слоя перемешивания (плотность) для различных моментов времени. Черный цвет соответствует тяжелому веществу, а белый – легкому. Сила тяжести направлена вниз

$h_+$  по вершинам пузырей, имеющих наибольшую вертикальную координату. Далее, во-первых, размеры каждого последующего рисунка расчетного поля для  $t = k$  ( $k = 4, 5, 6, 7$ ) уменьшены в  $h_+(t = k)/h_+(t = 3)$  раз. Во-вторых, каждая расчетная область повторяется по горизонтали столько раз, чтобы горизонтальные размеры кадров были одинаковы<sup>3)</sup>.

Довольно типичной оказывается структура, в которую входят несколько пузырей и струй. Обычно это блок или кластер из нескольких относительно малых пузырей и струй и довольно крупный пузырь. На рис.1 прослежена эволюция двух пузырей (обозначены цифрами), ставших к окончанию моделирования наиболее сильными.

На рис.2 представлены спектры вертикальной скорости  $w(x, z = 0, t = 5)$  и массы столба  $H(x, t = 5)$ . Для произвольной функции  $f(x, \dots)$  ее спектр  $f_n(\dots)$  вычисляется

<sup>3)</sup> На боковых границах расчетной области использовались периодические граничные условия, вверх и вниз – условия непротекания.

следующим образом:

$$f_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad a_n = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} f \cos nx dx, \quad b_n = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} f \sin nx dx,$$

$$f(x, \dots) = \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

$H(x, t) = \int \rho(x, z, t) dz / (\rho_h - \rho_l)$  – масса, содержащаяся в вертикальном столбе, интеграл берется от “дна”,  $z = -h_{down}$ , до “потолка”,  $z = h_{up}$ , ящика. Так как начальное возмущение задается только в скорости,  $|H_n| = 0$  при  $t = 0$ . С течением времени наблюдается укрупнение доминирующих структур, что проявляется в постепенном смещении распределения спектров влево по оси волновых чисел.

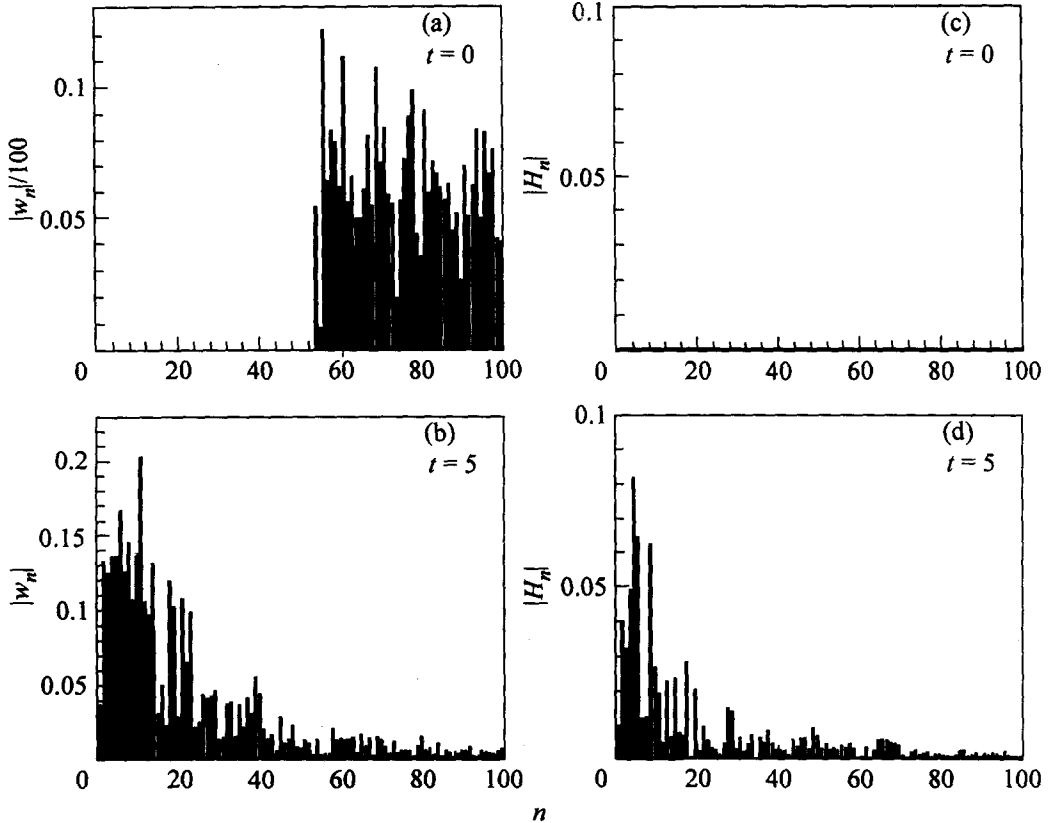


Рис.2. Спектры  $|w_n|$  (a), (b) и  $|H_n|$  (c), (d) для начального возмущения и на момент времени  $t = 5$

На рис.3 приведен пример автомодельного спектра для вертикальной компоненты скорости, вычисленного в сечении  $z = 0$ . Автомодельный спектр вычисляется при помощи выражений вида

$$\bar{\rho}_{\hat{n}}(\hat{z}) = \frac{\rho_n(z, t)}{\rho_h t}, \quad \bar{w}_{\hat{n}}(\hat{z}) = \frac{w_n(z, t)}{t^2}, \quad \bar{p}_{\hat{n}}(\hat{z}) = \frac{p_n(z, t)}{\rho_h t^3}, \quad \bar{H}_{\hat{n}} = \frac{H_n(t)}{t^3}. \quad (2)$$

Условно можно сказать, что они получаются из формул автомодельной подстановки в координатном представлении делением на  $\sqrt{\hat{n}}$ ,  $\hat{n} \propto 1/t^2$ . Это связано с дельта-

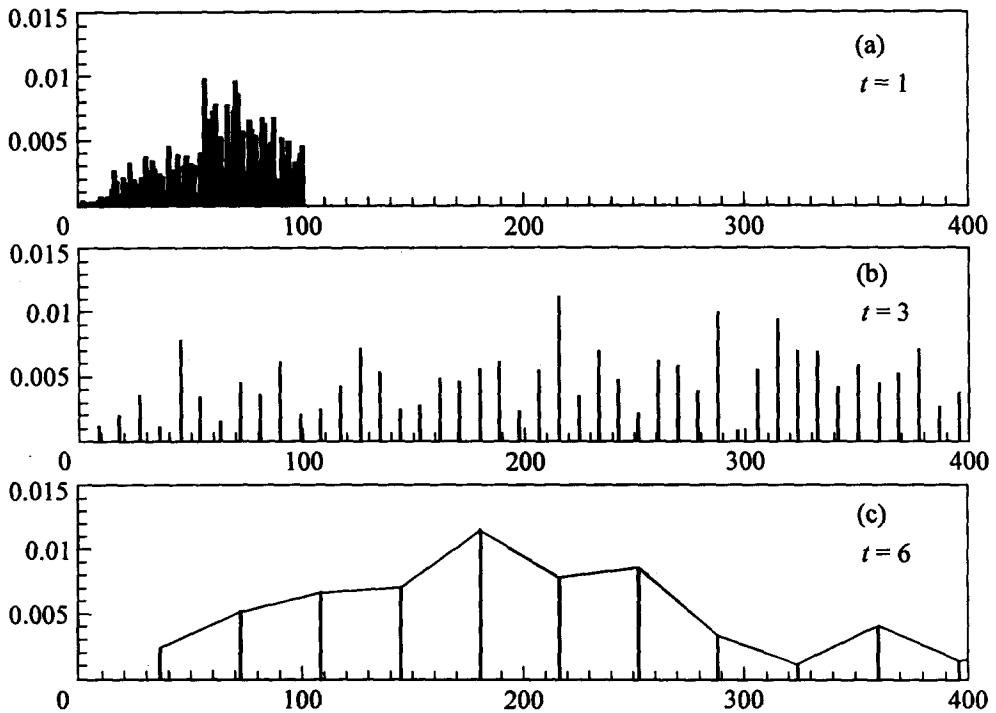


Рис.3. Автомоделный спектр  $|\psi_A|$  для моментов времени  $t = 1$  (а),  $t = 3$  (б) и  $t = 6$  (с)

коррелированностью фурье-образов моделируемых функций (дискретность их компьютерного представления) и особым характером интегрирования таких дельта-коррелированных функций (замена линейного дифференциала  $dk$  корневым  $\sqrt{dk}$ , см. [3, 4]). Соотношения (2) важны. Из них, например, следует нетривиальный вывод о том, что максимальная спектральная амплитуда флуктуаций давления нарастает пропорционально  $t^3$ . В представлении (2) спектры универсальны на автомоделном участке эволюции<sup>4</sup>. Напомним, что установление автомоделной стадии происходит при  $t = 2 \div 3/\sqrt{At}$  (для выбранной плотности расчетной сетки), а заметное торможение начинается после  $t = 6 \div 7/\sqrt{At}$  (слабо зависит от шага сетки). Рис.3б и 3с относятся к автомоделному участку эволюции. Форма (максимум, ширина) соответствующих спектров стационарна в автомоделных переменных, число гармоник внутри автомоделного распределения убывает со временем. Рис.3а соответствует более раннему моменту времени из переходной стадии эволюции. Соответствующий спектр более длинноволновый по сравнению с автомоделным.

<sup>4</sup> Результаты, приведенные на рис.1–3, получены на основе квазимонотонного гибридного сеточно-характеристического метода [10]. Заметим, что использование альтернативного численного подхода (метода крупных частиц) дает тот же универсальный спектр.

На основе расчетов многочисленных вариантов была исследована стимуляция перемешивания длинноволновыми возмущениями<sup>5)</sup>. Начальное возмущение задавалось в скорости и представляло собой сумму короткомасштабного и широкодиапазонного возмущений. Однородное по волновым числам широкодиапазонное возмущение не приносит никакого выделенного масштаба и, следовательно, сохраняет квадратичную автомодельность (с другими, возможно, коэффициентами  $\alpha_{\pm}$ ). Запишем начальное широкодиапазонное возмущение также в виде разложения по гармоникам (1). Пусть

$$a_n^0 = (w_{sat})_n \cdot \xi_n \cdot \varepsilon_{wb}, \quad b_n^0 = (w_{sat})_n \cdot \xi'_n \cdot \varepsilon_{wb}, \quad (3)$$

где  $\xi_n, \xi'_n$  – независимые случайные числа, равномерно распределенные на интервале  $[-1, 1]$ . Начальное поле (1), (3) определяется тремя факторами. Во-первых, это скорость насыщения  $(w_{sat})_n = F\sqrt{(1-\mu)g/n}$ ,  $F \approx 0.6$  для двумерного случая и порядка 1 для трехмерного (см. [24]), во-вторых, случайный фактор и, в-третьих, безразмерный параметр  $\varepsilon_{wb}$ . Это возмущение не имеет выделенного масштаба. Оно задается одним параметром – амплитудой  $\varepsilon_{wb}$  случайных широкодиапазонных шумов. На рис.4 собраны результаты расчетов для различных значений  $\varepsilon_{wb}$ . Как видно, стимуляция может значительно повысить коэффициент перемешивания  $\alpha_+$ . Из этих

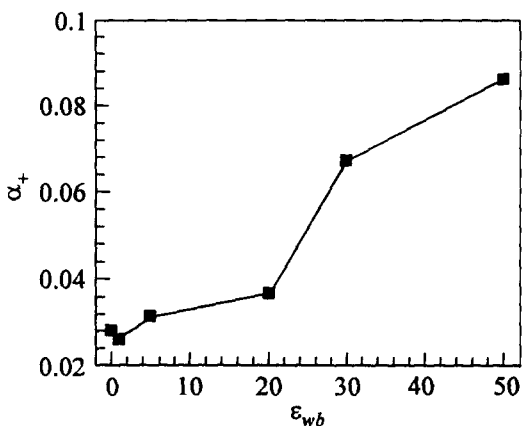


Рис.4. Зависимости коэффициента перемешивания  $\alpha_+(t=5)$  от амплитуды  $\varepsilon_{wb}$  в промилле

расчетов следует существование порога  $(\varepsilon_{wb})_{thr}$  примерно в 10 промилле. При амплитудах, меньших порога, перемешивание происходит в спонтанном режиме, влиянием шумов можно пренебречь. При запороговых амплитудах течение перестраивается. Спектральный бугор смещается в длинноволновую сторону. Это отражает усиление субгармоник. С усилением длинноволнового крыла связана интенсификация перемешивания, проявляющаяся в увеличении коэффициента  $\alpha_+$ . Если в спонтанном процессе происхождение субгармоник связано с центральным бугром в спектре, то при стимуляции часть субгармоник “черпается” из широкодиапазонных шумов, присутствующих изначально. Пороговая амплитуда значительна и имеет практически важное значение. Так, например, снижать амплитуду шумов за счет каких-либо дорогостоящих технологических действий (типа полировки) ниже пороговой амплитуды не имеет смысла.

<sup>5)</sup> Эти расчеты выполнены А.Ю.Демьяновым на основе метода крупных частиц [7].

Боковые границы расчетной области ограничивают горизонтальный размер крупных структур (кластеров), затрудняют перемешивание и, тем самым, уменьшают коэффициент турбулентного перемешивания. В проведенных расчетах этот эффект "стеснения" особенно отчетливо проявляется при моделировании эволюции короткомасштабных возмущений после достижения времени  $t = 6 \div 7h\sqrt{At}$ . Одним из авторов (И.Н.А.) была аналитически рассмотрена задача об асимптотике рэлей-тейлоровского перемешивания на больших временах в вытянутых расчетных областях. Получена "стесненная" асимптотика  $h_D \propto t^{2/3}$  вместо свободной  $h_D \propto t^2$ . Мы полагаем, что в проведенных расчетах момент  $t = 6 \div 7h\sqrt{At}$  характеризует начало торможения боковыми границами и перестройку течения со свободной асимптотики на "стесненную".

Авторы признательны С.И.Анисимову и О.М.Белоцерковскому за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты # 99-02-16666, 00-01-00250).

1. D.H.Sharp, *Physica* **D12**, 3 (1984).
2. H.-J.Kull, *Physics Reports* **206**, 197 (1991).
3. N.A.Inogamov, *Astroph. Space Phys. Rev.* **10**(part 2), 1 (1999).
4. Н.А.Иногамов, А.Ю.Демьянов, Э.Е.Сон, *Гидродинамика перемешивания*, М.: Издательство МФТИ, 1999.
5. Э.И.Асиновский, В.А.Зейгарник, Е.Ф.Лебедев и др., *Импульсные МГД-преобразователи химической энергии в электрическую*, под ред. А.Е.Шейндлина и В.Е.Фортова, М.: Энергоатомиздат, 1997.
6. J.Kane, D.Arnett, V.A.Remington et al., *Phys. Plasmas* **6**(5), 2065 (1999).
7. О.М.Белоцерковский, *Численное моделирование в механике сплошных сред*, изд. 2-е, перераб. и дополн., М.: Физматгиз, 1994.
8. О.М.Белоцерковский, А.М.Опарин, *Численный эксперимент в турбулентности: от порядка к хаосу*, изд. 2-е, дополн., М.: Наука, 2000.
9. О.М.Белоцерковский, В.А.Гущин, В.Н.Коньшин, *Ж. выч. мат. и мат. физ.* **27**, 594 (1987).
10. А.М.Опарин, в *Новое в численном моделировании: алгоритмы, вычислительные эксперименты, результаты*, под ред. А.С.Холодова, М.: Наука, 2000, с.63.
11. С.З.Беленький, Е.С.Фрадкин, *Труды ФИАН* **29**, 207 (1965).
12. В.Е.Неуважаев, *Прикл. мех. и техн. физ.*, **6**, 82 (1976).
13. Н.А.Иногамов, *Письма в ЖТФ* **4**, 743 (1978).
14. M.V.Schneider, G.Dimonte, and V.Remington, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3507 (1998).
15. D.L.Youngs, *Phys. Fluids* **A3**, 1312 (1991).
16. K.I.Read, *Physica* **D12**, 45 (1984).
17. Ю.В.Янилкин, *Вопр. атомной науки и техн., серия: матем. модел. физ. процессов* **4**, 88 (1999).
18. J.Glimm, J.W.Grove, X.-L.Li et al., *SIAM J. Sci. Comp.* **19**, 703 (1998).
19. N.N.Amuchina, N.S.Es'kov, A.V.Polionov et al., *Proc. of the 6th Inter.Workshop on the Phys. of Compressible Turbulent Mixing*, Printed in France by Imprimerie Caractere, Marseille, 1997.
20. М.Д.Камчибеков, Е.Е.Мешков, Н.В.Невмержицкий, Е.А.Сотсков, *Турбулентное перемешивание на цилиндрической границе газ-жидкость*, препринт N.46-96. РФЯЦ, ВНИИЭФ, г. Саров, 1996.
21. U.Alon, J.Hecht, D.Ofer, and D.Shvarts, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 534 (1995).
22. D.Ofer, U.Alon, D.Shvarts et al., *Phys. Plasmas* **3**, 3073 (1996).
23. S.I.Anisimov, Ya.B.Zel'dovich, N.A.Inogamov, and M.F.Ivanov, in: *Shock Waves, Explosions and Detonation*, Eds. J.R.Bowen, J.-C.Leyer, and R.I.Soloukhin, *Progress in Astronautics and Aeronautics Series* (M. Summerfield, editor-in-chief). Vol. 87. AIAA, Washington, DC. p.218(1983).
24. Н.А.Иногамов, А.М.Опарин, *ЖЭТФ* **116**, 908 (1999).