

## Четность и резкое расширение резонансных уровней в трехбарьерных структурах

А. Б. Пашковский

Научно-производственное предприятие “Исток”, 141190 Фрязино, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 30 июня 2005 г.

Для несимметричных трехбарьерных резонансно-туннельных структур с тонкими высокими барьерами получены выражения для резонансной активной высокочастотной малосигнальной проводимости и ширины резонансных уровней. Обнаружено, что если четность уровней, образующих общий резонансный уровень, в каждой из двухбарьерных структур – разная, то при определенном выборе параметров трехбарьерной структуры ширина общего уровня, а соответственно и интегральная проводимость всей структуры могут возрастать во много раз. Соответственно во много раз уменьшается и время жизни электронов на этом уровне, а значит, легко могут быть реализованы условия когерентного транспорта – ухода электронов из структуры без столкновения с фононами.

PACS: 73.40.–с

**Введение.** В последние годы заметный интерес привлекают полупроводниковые гетероструктуры с когерентным (бесстолкновительным) транспортом электронов [1–6]. В этих структурах среднее время ухода электрона из активного участка, который обычно представляет собой одну или несколько квантовых ям, существенно меньше характерного времени любого из процессов, нарушающих когерентность волновой функции электрона. После того как была теоретически обоснована [2] возможность создания квантового каскадного лазера на когерентном транспорте электронов на конкретных структурах, которые изготавливались уже в то время, исследование межподзонных переходов электронов в таких структурах позволило предсказать ряд новых физических эффектов и наметить пути их применения для эффективной генерации электромагнитных колебаний терагерцевого диапазона [3, 4]. Одной из принципиальных трудностей при создании как лазеров, так и других устройств на когерентном транспорте электронов является необходимость иметь высокую активную проводимость, то есть работать на структурах с узкими резонансными уровнями, с одной стороны, и малые времена жизни электронов в структуре (для их бесстолкновительного ухода из структуры и сохранения фазы волновой функции), а соответственно, широкие резонансные уровни, с другой. В [4] с целью увеличения активной высокочастотной проводимости и, соответственно, интенсивности квантовых переходов когерентного квантового каскадного лазера было предложено использовать трехбарьерные структуры, в которых переходы совершаются в первой яме (двухбарьерной структуре),

а один из уровней второй ямы совмещается в определенной степени, с нижним уровнем первой, образуя единый (выходной) уровень трехбарьерной структуры (рисунок (а)). Однако в этой работе не было исследовано влияние четности совмещаемых уровней, которое, как оказалось, может приводить к совершенно неожиданному результату. Как будет показано ниже, совмещение уровней разной четности позволяет существенно увеличить ширину общего уровня, не изменяя практически проводимость, и, следовательно, интенсивность квантовых переходов структуры. Это имеет принципиальное значение для работы как когерентного квантового каскадного лазера, так и других аналогичных устройств, поскольку позволяет уменьшить время пролета электронами активного участка структуры, увеличивая степень когерентности электронного транспорта и не уменьшая одновременно проводимость (интенсивность квантовых переходов).

**Результаты расчетов.** Рассмотрим несимметричную трехбарьерную структуру с тонкими ( $\delta$ -образными барьерами (см. рисунок (а)), к которой приложено однородное высокочастотное электрическое поле, изменяющееся со временем по закону  $E(t) = 2E \cos \omega t = E(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ . Для определенности считаем, что моноэнергетический поток электронов с энергией  $\varepsilon$  падает слева на резонансный уровень с номером  $K$  первой двухбарьерной структуры, частота высокочастотного поля соответствует переходам на уровень  $L$  этой же структуры (см. рисунок) и один из резонансных уровней второй двухбарьерной структуры с номером  $N$  находится вблизи уровня  $L$  первой, образуя общий резонансный уро-

вень всей структуры. Тогда нестационарное уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + H(x)\psi + H(x, t)\psi,$$

$$H(x) = U(\theta(x) - \theta(x-a)) + U_1(\theta(x-a) - \theta(x-a-l)) + U_2\theta(x-a-l) + \alpha\delta(x) + \alpha\rho\delta(x-a) + \alpha\gamma\delta(x-a-l), \quad (1)$$

$$H(x, t) = -qE[x(\theta(x) - \theta(x-a-l)) +$$

$$+(a+l)\theta(x-a-l)](e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}).$$

Здесь  $q, m^*$  – заряд и масса электрона;  $\alpha = \varphi_b b$  – мощность первого барьера;  $\varphi_b, b$  – его высота и ширина;  $\theta(x)$  – единичная функция;  $\gamma, \rho$  – численные коэффициенты;  $a, l$  – расстояния между барьерами;  $U, U_1$  и  $U_2$  – величина скачка дна зоны проводимости на барьерах. При этом невозмущенная волновая функция, нормированная на один электрон, имеет вид

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \exp(ik_0x) + D_0 \exp(-ik_0x), & x < 0 \\ A_0 \sin(kx) + B_0 \cos(kx), & 0 < x < a \\ Z_0 \sin(k_1(x-a)) + W_0 \cos(k_1(x-a)), & a < x < a+l \\ C_0 \exp(ik_2(x-a-l)), & x > a+l \end{cases}, \quad (2)$$

$$k_0 = (2m^*\varepsilon/\hbar^2)^{1/2}, \quad k = (2m^*(\varepsilon + U)/\hbar^2)^{1/2},$$

$$k_1 = (2m^*(\varepsilon + U_1)/\hbar^2)^{1/2}, \quad k_2 = (2m^*(\varepsilon + U_2)/\hbar^2)^{1/2}.$$

Предлагаемый вниманию читателей эффект настолько же прост, насколько, на первый взгляд, нелеп и неожидан. Поэтому имеет смысл вначале рассмотреть не переходы в структуре с высокочастотным полем, где он маскируется достаточно громоздкими, хотя и совершенно элементарными по своей сути выражениями, а решить гораздо более простую и наглядную задачу о прохождении электронов через общий резонансный уровень трехбарьерной структуры, образованный резонансными уровнями в каждой из двухбарьерных структур (квантовых ям), см. рисунок (b). Система уравнений для описания прохождения электронов через трехбарьерную структуру в матричном виде с учетом условий сшивания волновой функции на барьерах [7] имеет вид

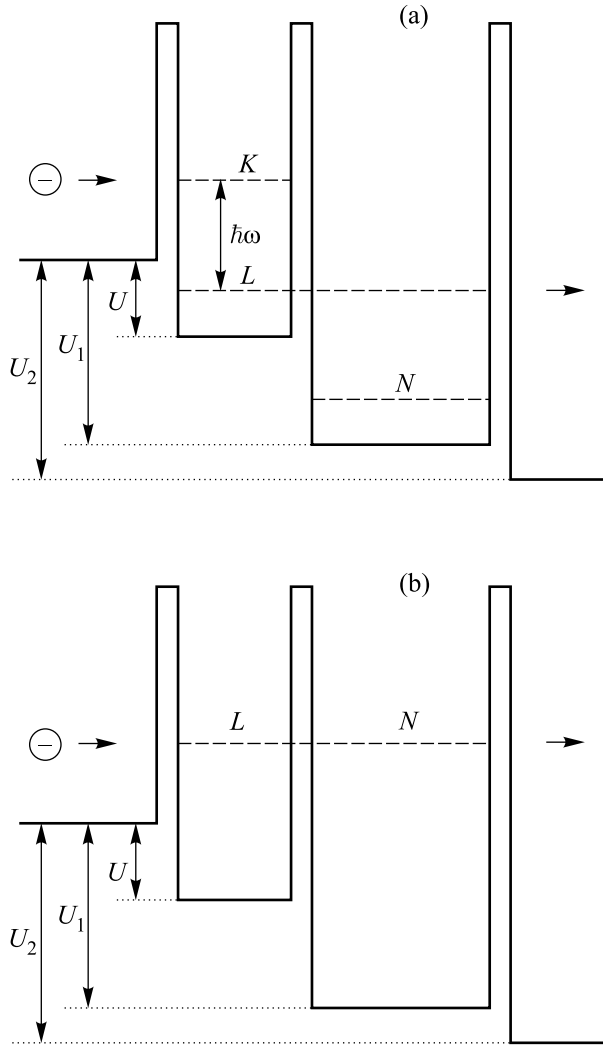
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ ik_0 - y & k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin ka & \cos ka & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -k \cos ka & k \sin ka & k_1 & -\rho y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin k_1 a & \cos k_1 a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -k_1 \cos k_1 a & k_1 \sin k_1 a & ik_2 - \gamma y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D_0 \\ A_0 \\ B_0 \\ Z_0 \\ W_0 \\ C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ ik_0 + y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь  $y = 2m^*\alpha/\hbar^2$  – величина, которая в структурах с  $\delta$ -образными барьерами выступает в роли резонансного параметра. При достаточно мощных барьерах и, соответственно, узких резонансных уровнях  $y \gg k$ .

Решение системы будем искать методом Крамера. Для определения коэффициента прохождения электронов через структуру вычислим коэффициент  $C_0$

волновой функции (2):  $C_0 = \Delta C_0/\Delta$ , где  $\Delta$  – определитель системы (3),  $\Delta C_0$  – определитель, получаемый из  $\Delta$  заменой последнего столбца на правую часть уравнения (3). Элементарные вычисления показывают, что

$$\Delta C_0 = 2ikk_0k_1 \quad (4)$$



Схематическая зонная диаграмма рассматриваемых трехбарьерных структур: (а) трехбарьерная структура с резонансными переходами, (б) трехбарьерная структура со сквозным туннелированием

абсолютно не зависит от толщины барьеров и является плавной медленно монотонно возрастающей функцией энергии электронов. Поэтому очевидно, что коэффициент прохождения будет максимальным (резонансным) в том случае, когда определитель системы (3) минимален.

При соблюдении условий

$$\begin{aligned} \cos ka &\approx (-1)^L, & \cos k_1 l &\approx (-1)^N, \\ \sin ka &\approx -\frac{\chi k}{y}, & \sin k_1 l &\approx -\frac{\lambda k_1}{y}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\lambda = (-1)^{L+N+1} \frac{(-1)^{L+1} (1 + \gamma + \rho) + \chi(\gamma + \rho)}{\gamma(1 + \rho + (-1)^{L+1} \chi \rho)}$$

определитель системы становится чисто мнимым и малым по резонансному параметру (видимо, это общее свойство всех систем с  $\delta$ -образными барьерами):

$$\Delta_r = (-1)^{L+N+1} \frac{ik k_1 (k_0 \gamma^2 + k_2 (1 + \rho (-1)^{L+1} \chi \rho)^2)}{\gamma(1 + \rho + (-1)^{L+1} \chi \rho)}. \quad (6)$$

Легко показать, что при малых отклонениях энергии электронов от резонансной (соответственно, величины волновых векторов на  $\delta k$ ,  $\delta k_1$ ) определитель становится равным

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_r + \delta \Delta = \Delta_r - y^3 \gamma \rho \delta k a \delta k_1 l - \\ &- \frac{y^2 \gamma ((-1)^{L+N} k_1 - \delta k - a \pm k \delta k_1 l (1 + \rho + (-1)^{L+1} \chi \rho)^2)}{1 + \rho + (-1)^{L+1} \chi \rho}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из свойств определителя  $\Delta C_0$  и определителя системы  $\Delta$  следует простой способ определения ширины резонансного уровня. Полуширина  $\Gamma/2$  резонансного уровня (расстояние от его центра, на котором квадрат волновой функции внутри структуры или коэффициент прохождения через структуру падает вдвое) определяется условием двукратного увеличения квадрата модуля определителя системы:

$$|\Delta|^2 = 2|\Delta_r|^2, \quad (8)$$

или, так как резонансный определитель – чисто мнимая величина, а добавка к нему – величина действительная, то

$$|\Delta_r| = |\delta \Delta|. \quad (9)$$

Если четность уровней в каждой из квантовых ям одинакова (знак + в формуле (7)), то при соблюдении сразу двух условий  $k/y \ll 1$  и  $(k/y)^{1/2} \ll 1$  (выполнение второго условия нужно, чтобы не учитывать асимметрию резонансного уровня) первым членом в поправке к резонансному определителю в формуле (7) можно пренебречь. В этом случае ничего необычного не происходит и ширина резонансного уровня определяется выражением

$$\Gamma_L = \Gamma_{\text{sim}}^L \frac{k_0 \gamma^2 + k_2 (1 + \rho + (-1)^{L+1} \chi \rho)^2}{2\gamma^2 k \left( 1 + \frac{L^2 l^3}{N^2 a^3} (1 + \rho + (-1)^{L+1} \chi \rho)^2 \right)}. \quad (10)$$

Здесь  $\Gamma_{\text{sim}}$  – ширина уровня в симметричной двухбарьерной структуре шириной  $a$  с  $\delta$ -образными барьерами с мощностью  $\alpha$  и высотой уровня  $\Sigma_L$  от дна зоны проводимости:

$$\Gamma_{\text{sim}}^L = \frac{8k^2 \Sigma_a}{\pi L y^2}, \quad \Sigma_L = \frac{\pi^2 \hbar^2 L^2}{2m^* a^2}, \quad \Sigma_N = \frac{\pi^2 \hbar^2 N^2}{2m^* l^2}. \quad (11)$$

То есть при одинаковой четности уровней, образующих общий резонансный уровень, ширина уровня в трехбарьерной структуре по большому резонансному параметру  $y/k$  имеет ту же степень малости, что и ширина уровня симметричной двухбарьерной структуры.

При уровнях разной четности сразу видно принципиальное отличие от случая уровней с одинаковой четностью. В этом случае в последнем слагаемом выражения (7) между членами с  $\delta k_- a$  и  $\delta k_1 l$  стоит знак минус, а не плюс. Поэтому даже при соблюдении сразу двух условий  $k_-/y \ll 1$  и  $(k_-/y)^{1/2} \ll 1$  (строгом резонансе) можно подобрать параметры структуры так,

$$\chi = (-1)^L \frac{1 + \rho \pm (Na/Ll)^{3/2}}{\rho}, \quad (12)$$

что вся эта поправка к определителю будет мала по сравнению с предпоследним слагаемым, а ширина резонансного уровня определяется выражением

$$\Gamma_L = \frac{\Gamma_{\text{sim}}^L}{2} \left(\frac{a}{l}\right)^{3/4} \left(\frac{N}{L}\right)^{1/4} \times \left[ \frac{k_0 \gamma^2 + k_2 (Na/Ll)^3}{\gamma^2 \rho k} \right]^{1/2} \left(\frac{y}{k}\right)^{1/2}. \quad (13)$$

Таким образом, в случае разной четности уровней, образующих общий уровень трехбарьерной структуры, и выполнении условия (12) резонансный уровень расширяется во много раз (пропорционально корню из большого резонансного параметра  $y/k$ ) по сравнению со случаем одинаковой четности уровней.

Надо отметить, что для каждой резонансной энергии параметр  $\chi$  может принимать два значения (как в случае расщепленного уровня в симметричной двухбарьерной структуре), однако условия резонанса на параметр  $\lambda$  приводят к тому, что существование двух близко расположенных широких уровней (а по сути, одного широкого расщепленного уровня) практически невозможно.

Интересно также отметить, что при выполнении дополнительного условия

$$k_0 \gamma^2 = k_2 (Na/Ll)^3, \quad (14)$$

уровень становится не только очень широким, а еще и абсолютно прозрачным в центре (конечно, с точностью до малых членов порядка  $k/y$ ).

Вернемся теперь к структуре на рисунке (а) с приложенным высокочастотным полем. При достаточно мощных барьерах ( $y \gg k$ ), а только при таких барьерах вообще и имеет смысл говорить о системе

с резонансными уровнями, коэффициенты волновой функции (2) имеют вид

$$D_0 = 1, \quad B_0 = 2, \quad A_0 = \frac{2y}{k}, \quad W_0 = \frac{2(-1)^K}{\rho}, \quad (15)$$

$$Z_0 = \frac{2 \text{ctg}(k_1 l)}{\rho}, \quad C_0 = -\frac{2k_1}{\gamma \rho y \sin k_1 l}.$$

В приближении малого сигнала поправка первого порядка  $\psi_1$  к волновой функции основного состояния имеет временную зависимость  $\psi_1 = \psi_+(x)e^{-i(\omega_0+\omega)t} + \psi_-(x)e^{-i(\omega_0-\omega)t}$  [3], соответствующую испусканию и поглощению фотона с энергией  $\hbar\omega$ . В конкретном случае трехбарьерной структуры

$$\psi_{\pm}(x) = \begin{cases} D_{\pm} \exp(-ik_{0\pm}x), & x < 0 \\ A_{\pm} \sin(kx) + B_{\pm} \cos(kx) + \varphi_{\pm}(x), & 0 < x < a \\ Z_{\pm} \sin(k_{1\pm}(x-a)) + \\ + W_{\pm} \cos(k_{1\pm}(x-a)) + \chi_{\pm}(x), & a < x < a+l \\ C_{\pm} \exp(ik_{2\pm}(x-a-l)) + \\ + P_{\pm} \exp(ik_2(x-a-l)), & x > a+l \end{cases}, \quad (16)$$

где

$$k = (2m^*(\hbar\omega - \varepsilon)/\hbar^2)^{1/2},$$

$$k_{i\pm} = (2m^*(\varepsilon + U_i \pm \hbar\omega)/\hbar^2)^{1/2},$$

а

$$P_{\pm} = \mp \frac{qEa}{\hbar\omega} \psi_0(a+l),$$

$$\varphi_{\pm}, \chi_{\pm} = \mp \frac{qEa}{\hbar\omega} \psi_0(x) + \frac{qE}{m^*\omega^2} \psi_0'(x)$$

– соответствующие частные решения уравнений для  $\psi_{\pm}$  (см. [3, 4]). Рассмотрим структуру, изображенную на рисунке (а), и частоту, соответствующую переходам на нижний резонансный уровень. В этом случае поправка к волновой функции, соответствующая поглощению фотонов  $\psi_+$ , мала, а система уравнений для определения коэффициентов  $A_-$ ,  $B_-$ ,  $C_-$ ,  $D_-$ ,  $Z_-$ ,  $W_-$  в матричной форме имеет тот же вид, что и система (3), только с заменой волновых векторов  $k_0 \rightarrow ik$ ,  $k_i \rightarrow k_{i-}$  с правой частью:

$$f_1 = \varphi_-(0), \quad f_2 = -\varphi_-'(0),$$

$$f_3 = \chi_-(a) - \varphi_-(a), \quad f_4 = \rho y \chi_-(a) - \chi_-'(a) + \varphi_-'(a), \quad (17)$$

$$f_5 = P_- - \chi_-(a+l), \quad f_6 = (\gamma y - ik_2)P_- - \chi_-'(a+l).$$

При выполнении условий (несколько отличные от (5)) условия резонанса обусловлены тем, что слева от

структуры дно зоны проводимости находится выше резонансного уровня

$$\begin{aligned}\cos k_{-a} &\approx (-1)^L, \quad \cos k_{1-l} \approx (-1)^N, \\ \sin k_{-a} &\approx -\frac{k_-}{y} \left( \beta + \frac{\Delta\beta}{y} \right), \\ \sin k_{1-l} &\approx -\frac{k_{1-}}{y} \left( \xi + \frac{\Delta\xi}{y} \right), \\ \beta &= \frac{1 + \rho + \gamma + \gamma\xi + (-1)^{L+1}\gamma\xi\rho}{\gamma + \rho + (-1)^{L+1}\gamma\xi\rho} (-1)^L, \\ \Delta\beta &= (-1)^{L+1} \kappa - \frac{\gamma^2 \Delta\xi}{(\gamma + \rho + (-1)^{L+1}\gamma\xi\rho)^2},\end{aligned}\quad (18)$$

определитель становится мал по большому резонансному параметру  $y$ :

$$\Delta_r = \frac{ik_- k_{1-} k_{2-} (-1)^{2L+N+1}}{\gamma + \rho + (-1)^{2L+N+1}\gamma\xi\rho}. \quad (19)$$

При малых отклонениях энергии электронов от резонансной (соответственно, величины волновых векторов на  $\delta k_-$ ,  $\delta k_{1-}$  определитель равен

$$\begin{aligned}\Delta &= \Delta_r + \delta\Delta = \Delta_r - y^3 \gamma \rho \delta k_{-a} \delta k_{1-l} - \\ &\frac{y^2 (k_- \gamma^2 \delta k_{1-l} + (-1)^{L+N} k_{1-} \delta k_{-a} (\gamma + \rho + (-1)^L \gamma \xi \rho)^2)}{\gamma + \rho + (-1)^L \gamma \xi \rho}.\end{aligned}\quad (20)$$

При уровнях одной четности и соблюдении условий  $k_-/y \ll 1$  и  $(k_-/y)^{1/2} \ll 1$  предпоследним слагаемым в полученном выражении можно пренебречь. В этом случае ширина нижнего уровня трехбарьерной структуры рассчитывается по формуле

$$\Gamma_L = \frac{\Gamma_{\text{sim}}^L}{2} \frac{k_{2-}}{k_- ((Ll/Na)^3 + (\gamma + \rho + (-1)^L \gamma \xi \rho)^2)}. \quad (21)$$

При  $L$ ,  $N$  – разной четности сразу как и в случае, рассмотренном ранее в последнем слагаемом (20), между членами с  $\delta k_{-a}$  и  $\delta k_{1-l}$  стоит знак минус, а не плюс. Поэтому даже при соблюдении сразу двух условий  $k_-/y \ll 1$  и  $(k_-/y)^{1/2} \ll 1$  (строгом резонансе) можно подобрать параметры структуры так,

$$\xi = (-1)^{L+1} \left( \frac{1}{\rho} \pm \frac{L}{\rho N} \sqrt{\frac{l^3}{a^3} + \frac{1}{\gamma}} \right), \quad (22)$$

что вся эта поправка к определителю будет мала по сравнению с предпоследним слагаемым. В этом случае ширина уровня определяется выражением

$$\Gamma_L = \frac{\Gamma_{\text{sim}}^L}{2} \left( \frac{y k_{2-}}{\gamma \rho k_-^2} \right)^{1/2} \left( \frac{N}{L} \right)^{3/2} \left( \frac{a}{l} \right)^{9/4}. \quad (23)$$

Таким образом, оказывается, что и в этом случае ширина уровня будет пропорциональна не  $(k_-/y)^2$ , а  $(k_-/y)^{3/2}$ , то есть и в этом случае резонансный уровень становится во много раз шире. Соответственно, увеличивается и интегральная проводимость структуры. Естественно, интегральная проводимость в общем случае зависит не только от ширины нижнего уровня, но и от ширины верхнего уровня и функции распределения электронов вблизи его центра. Однако в простейшем случае, когда верхний уровень заметно шире нижнего, а функция распределения электронов  $f(\varepsilon)$  мало меняется на расстояниях по энергии порядка ширины верхнего уровня, интегральная проводимость растет пропорционально ширине нижнего уровня, а выражение для ее расчета имеет вид

$$\sigma_{\text{int}} = \frac{\pi \sigma f(\varepsilon) \Gamma_L}{2}. \quad (24)$$

Здесь

$$\sigma = 8\sigma_{\text{sim}} \frac{\gamma^2 k_-}{k_{2-}} \left( \frac{L^2 l^3}{N^2 a^3} \right) \quad (25)$$

– моноэнергетическая проводимость структуры, а

$$\sigma_{\text{sim}} = -\frac{8q^2 m^* \alpha^4}{\pi L \hbar^6 \omega^3} [1 - (-1)^{K-L}] \quad (26)$$

– активная резонансная проводимость симметричной двухбарьерной структуры с мощностью барьеров  $\alpha$ , в которой электроны с единичной концентрацией переходят с верхнего уровня с номером  $K$  на нижний с номером  $L$ .

Окончательно для интегральной проводимости получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{int}} &= \frac{\pi \sigma f(\varepsilon) \Gamma_L}{2} = \\ &= 4\sigma_{\text{sim}} \Gamma_{\text{sim}}^L \left( \frac{y}{\gamma \rho k_{2-}} \right)^{1/2} \left( \frac{L}{N} \right)^{1/2} \left( \frac{l}{a} \right)^{3/4} \frac{\pi f(\varepsilon)}{2}.\end{aligned}\quad (27)$$

Видно, что в этом случае интегральная проводимость может резко возрасти по сравнению со случаем общего уровня, образованного уровнями одной четности.

**Заключение.** Обнаружено, что если в несимметричной трехбарьерной структуре четность уровней, образующих общий резонансный уровень, в каждой из ям – разная, то ширина общего уровня может возрасти во много раз по сравнению с шириной уровня, образованного уровнями одной четности, даже при абсолютной прозрачности структуры. При резонансных переходах электронов в несимметричной трехбарьерной структуре под действием слабого высокочастотного поля при разной четности уровней, образующих общий нижний резонансный уровень, и определенном выборе параметров структуры ширина общего уровня, а соответственно, и интегральная

проводимость всей структуры могут возрастать во много раз. Соответственно, на таком уровне существенно уменьшается время жизни электронов, а значит, легко могут быть реализованы условия ухода электронов из структуры без столкновения с фононами. Кроме того, при определенных условиях это может приводить к резкому увеличению интегральной проводимости структуры. Таким образом, подобные структуры могут стать весьма перспективными как при создании квантовых каскадных лазеров с баллистическим транспортом электронов, так и при разработке других устройств с когерентным транспортом электронов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект # 04-02-17177).

- 
1. S. Blaser, M. Rochat, M. Beck, and J. Faist, *Phys. Rev. B* **61**, 8369 (2000).
  2. Е. И. Голант, А. Б. Пашковский, А. С. Тагер, *Письма в ЖТФ* **20**, 74 (1994).
  3. Е. И. Голант, А. Б. Пашковский, *Письма в ЖЭТФ* **63**, 559 (1998).
  4. Е. И. Голант, А. Б. Пашковский, *Письма в ЖЭТФ* **67**, 372 (1996).
  5. Д. В. Поздняков, В. М. Борздов, Ф. Ф. Комаров, *ФТП* **38**, 1097 (2004).
  6. C. Gmachl, F. Capasso, D. L. Sivco, and A. Y. Cho, *Rep. Prog. Phys.* **64**, 1533 (2001), IOP Publishing Ltd.
  7. В. М. Галицкий, Б. М. Карнаков, В. И. Коган, *Задачи по квантовой механике*, М.: Наука, 1981, с. 150.