

ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД БЕРЕЗИНСКОГО – КОСТЕРЛИТЦА – ТАУЛЕССА В СИСТЕМАХ С ЭКЗОТИЧЕСКИМИ СИММЕТРИЯМИ

С.А.Булгадаев

*Институт теоретической физики им.Л.Д.Ландау РАН
117334 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 22 февраля 1996 г.

После переработки 8 апреля 1996 г.

Рассмотрен фазовый переход Березинского–Костерлитца–Таулесса в системах с исключительными группами симметрии $G = E_{6,7,8}, G_2, F_2$. Методом ренорм-группы найдены критические индексы и показатели логарифмических поправок к корреляционным функциям в точке перехода. Показано, что для $G = A, D, E$ критические индексы выражаются через числа Кокстера h_G (или значения оператора Казимира в присоединенном представлении K_2^G).

PACS: 05.70.Jk, 05.70.Fh

Исключительные группы $G_2, F_4, E_{6,7,8}$, открытые около ста лет назад на "кончике пера" в работах Киллинга и Картана, долгое время считались экзотическими с точки зрения их применения. Но позднее, благодаря своим уникальным свойствам симметрии и связи с различными алгебрами над числами Кэли (октавами), они стали находить применение во многих областях чистой и прикладной математики. В последнее время исключительные группы находят приложение во многих задачах физики. Наиболее интересные случаи: 1) исключительная роль группы E_8 и связанной с ней уникальной четной унимодулярной решетки в построении квантовой безаномальной теории струн и появление группы E_6 при компактификации этих струн [1], 2) связь интегрируемых возмущений конформных теорий, описывающих критические точки фазовых переходов второго рода в двумерных моделях, с аффинными теориями Тоды, при этом обычной и трикритической моделям Изинга, возмущенным магнитным полем, соответствуют теории Тоды с группой E_8 и E_7 , соответственно, а трикритической Z_3 модели Поттса в магнитном поле – теория Тоды с группой E_6 [2].

В предлагаемой статье будет рассмотрен фазовый переход Березинского–Костерлитца–Таулесса (БКТ) в системах, описываемых обобщенными (то есть содержащими все корни) теориями Тоды со всеми исключительными группами.

Обычный фазовый переход БКТ [3,4] происходит в системах с $U(1)$ -симметрией, имеющих топологические возбуждения в виде вихрей, взаимодействующих по логарифмическому закону

$$H_2 = -\frac{e_1 e_2}{2\pi} \ln \left| \frac{x_1 - x_2}{a} \right|,$$

где $e_{1,2} = \pm 1$ – топологический заряд вихря. Таким образом, это фазовый переход в двумерном кулоновском газе, описываемом статистической суммой

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\mu^{2N}}{N!} \int \prod_{i=1}^N d^2 x_i \sum_{\{e_i\}} e^{-\beta H_N},$$

где $\sum'_{\{e_i\}}$ означает суммирование по всем нейтральным конфигурациям зарядов

$$\sum_{i=1}^N e_i = 0,$$

$$H_N = - \sum_{i < j}^N e_i e_j \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{x_i - x_j}{a} \right|,$$

$\mu^2 = ga^{-2}$, g – химическая активность, a – постоянная решетки или другой обрезаящий параметр на малых расстояниях.

Статсумма Z имеет эквивалентное представление в виде теории поля с S_{eff} [3, 4]:

$$Z = \int D\varphi \exp(-S_{eff}[\varphi]), \quad S_{eff}[\varphi] = S_{SG} = \int d^2x \left[\frac{1}{2\beta} (\partial_\mu \varphi)^2 - \mu^2 V(\varphi) \right],$$

$$V(\varphi) = \sum_{e=\pm 1} e^{ie\varphi} = 2 \cos \varphi.$$

Фазовый переход (ФП) БКТ характеризуется тем, что при понижении температуры $1/\beta$ газ вихрей переходит из "плазменной" фазы с конечным корреляционным радиусом ξ (радиусом экранирования) в "диэлектрическую" фазу с бесконечным ξ , при этом при приближении к критической температуре $1/\beta^* = e^2/8\pi$ $\xi \rightarrow \infty$ по закону

$$\xi \sim \exp(K\tau^{-\nu}), \quad \tau = \frac{T - T^*}{T^*}, \quad \nu = 1/2,$$

где K – константа $O(1)$.

В системах с симметрией, описываемой простой компактной группой G или ее максимальной абелевой подгруппой T_G , возможны вихри с изовекторными зарядами e_a , принадлежащими n -мерной решетке (n – ранг группы G), связанной с решеткой дуальных корней группы G [5]. Эти вихри тоже взаимодействуют по логарифмическому закону и поэтому в таких системах тоже может происходить ФП БКТ. Так как характеристики ФП (критические индексы и т.д.) зависят только от геометрии зарядов с минимальной нормой $|e_a|$, то эквивалентная эффективная теория поля для таких систем имеет вид [6]

$$Z = \int D\vec{\varphi} \exp(-S_{eff}[\vec{\varphi}]), \quad S_{eff}[\vec{\varphi}] = \int d^2x \left[\frac{1}{2\beta} (\partial_\mu \vec{\varphi})^2 - \mu^2 V(\vec{\varphi}) \right],$$

$$V(\vec{\varphi}) = \sum_{\{a\}} \exp(i(e_a \vec{\varphi})), \quad \vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n), \quad (1)$$

где $\sum_{\{e_a\}}$ идет только по $\{e_a\}$ с минимальным $|e_a|$ и $\sum_{\{a\}} e_a = 0$ (условие нейтральности).

Для простых односвязных групп G с простыми связями (серии A, E) $\{e_a\}$ совпадает с системой корней $\{r_a\}$ алгебр Ли этих G . В этом случае $V(\vec{\varphi})$ является характером присоединенного представления группы G . Это дает другую, теоретико-групповую интерпретацию возможных $V(\vec{\varphi})$, которые теперь могут быть связаны с разложением G -инвариантных $V(\vec{\varphi})$ по характерам группы G [7]. Здесь будет рассмотрен ФП в системах с "экзотическими"

группами симметрий $G = E_{6,7,8}, G_2, F_4$ с $V(\bar{\varphi})$, совпадающими с характеристиками присоединенных представлений этих групп (системы с классическими группами симметрий A, B, C, D были рассмотрены ранее [6, 7]). Теории (1) с такими $V(\bar{\varphi})$ являются обобщением соответствующих теорий Тоды (простых и аффинных), в которых ФП БКТ невозможен, так как они не удовлетворяют условию нейтральности (кроме случая $G = A_n$ [6]).

Для групп G_2 и F_4 геометрия множеств минимальных корней $\{r_a\}$ и минимальных дуальных корней $\{r_v\}$ совпадает с геометрией систем корней групп $A_2 = SU(3)$ и $D_4 = SO(8)$, соответственно, и, следовательно, все критические индексы для них совпадают: $\nu_{G_2} = \nu_{A_2} = 2/5$, $\nu_{F_4} = \nu_{D_4} = 1/4$. Поэтому для полной классификации возможных типов особенностей остается рассмотреть группы $E_{6,7,8}$. Для нахождения критических индексов используется метод ренорм-группы. Уравнения ренорм-группы имеют вид [6, 7]

$$\frac{dg}{dl} = -2\delta g + B_G g^2, \quad \frac{d\delta}{dl} = -C_G g^2. \quad (2)$$

Здесь g – безразмерная μ^2 , а $\delta = (\beta r^2 - 8\pi)/8\pi$, $B_G = \pi\theta_G$, θ_G – кратность воспроизведения $V(\bar{\varphi})$ при ренормировании (1) или число способов, которыми каждый корень может быть представлен в виде суммы двух других корней, $C_G = 2\pi^2 N_G$, где N_G – константа, определяемая из условия

$$\sum_{\{a\}} r_i^a r_k^a = N_G \delta_{ik}.$$

Так как все корни групп серии E имеют одинаковую длину $r^2 = 2$, то $N_G = K_2^G$ – собственному значению оператора Казимира в присоединенном представлении, которое для групп серий A, D, E может быть выражено через число Кокстера $h_G = (\text{число всех корней})/\text{ранг группы } G$

$$K_2^G = 2h_G. \quad (3)$$

Уравнения ренорм-группы (1) имеют две сепаратрисы [6, 7]:

$$u_{1,2} \equiv (g/\delta)_{1,2} = \frac{-1}{2C_G} [B_G \pm (B_G^2 + 8C_G)^{1/2}], \quad (4)$$

где u_2 является линией раздела фаз. Критический индекс ν_G дается выражением

$$\nu_G = |u_2| [(B_G/C_G)^2 + 8/C_G]^{-1/2}. \quad (5)$$

Вычисление коэффициентов B_G, C_G и критических индексов ν_G начнем с группы E_6 . Ее система корней $\{r_a\}$ состоит из 72 векторов в 6-мерном пространстве, которые удобно представить как векторы в 8-мерном пространстве с условием, что $r_6 = r_7 = -r_8$ для всех r_a :

$$\pm e_i \pm e_j (1 \leq i < j \leq n), \quad \pm \frac{1}{2} (e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{i=1}^5 (-1)^{\alpha(i)} e_i), \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^5 \alpha(i) = 0 \pmod{2}.$$

Здесь e_i - ортонормированный репер.

Система корней E_7 состоит из 126 корней, которые в 8-мерном пространстве ортогональны вектору $e_7 + e_8$:

$$\pm e_i \pm e_j \quad (1 \leq i < j \leq 6), \quad \pm(e_7 - e_8),$$

$$\pm \frac{1}{2}(e_7 - e_8 + \sum_{i=1}^6 (-1)^{\alpha(i)} e_i), \quad \sum_{i=1}^6 \alpha(i) = 1 \pmod{2}. \quad (7)$$

Система корней E_8 состоит из 240 корней в 8-мерном пространстве:

$$\pm e_i \pm e_j (i < j), \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 (-1)^{\alpha(i)} e_i, \quad \sum_{i=1}^8 \alpha(i) = 0 \pmod{2}. \quad (8)$$

Эти системы обладают симметрией относительно дискретной конечной группы Вейля W_G , которая действует на корнях транзитивно, то есть переводит каждый корень в любой другой. Поэтому для вычисления B_G достаточно вычислить его для какого-нибудь одного корня. Геометрия этих систем корней такова, что углы между корнями γ_{ab} могут принимать только три значения:

$$\gamma = \pi/2, \quad \pi/3, \quad 2\pi/3.$$

Поэтому составить какой-либо корень r из двух других можно только тогда, когда углы между ними равны $2\pi/3$, а между выбранным корнем r и его составляющими - $\pi/3$, то есть вклад в θ_G дают только корни, составляющие с r угол $\pi/3$. Непосредственным вычислением можно показать, что число таких корней, а следовательно, и θ_G равно

$$\theta_G = 2(h_G - 2), \quad (9)$$

где

$$h_6 = 12, \quad h_7 = 18, \quad h_8 = 30. \quad (10)$$

Замечательным образом оказывается, что все коэффициенты уравнений ренорм-группы, а потому и все критические характеристики ФП зависят только от числа Кокстера h_G или оператора Казимира K_2^G . Подставляя (3), (9) в (4), (5), находим

$$u_{1,2} = -1/2\pi, \quad 1/\pi h_G, \quad \nu_G = 2/(h_G + 2), \quad (11)$$

то есть все радикалы в (4), (5) благополучно разрешаются. Это свойство разрешимости многих квадратичных уравнений на алгебрах Ли связано с их симметрией. Отметим также универсальный, то есть не зависящий от G , наклон первой сепаратрисы. Эта сепаратриса имеет важное значение для описания асимптотически свободных теорий поля с $S_{eff}(1)$ [7].

Легко убедиться, что найденные ранее выражения для N_G , θ_G , ν_G и других характеристик ФП в системах с симметрией групп серий A_n , D_n [7] тоже могут быть выражены по формулам (3), (9), (11) через соответствующие h_G . Таким образом, для всех групп с простыми связями (серии A , D , E) все характеристики ФП БКТ в системах, описываемых $S_{eff}(1)$, выражаются через числа Кокстера h_G или значение оператора Казимира K_2^G в присоединенном представлении.

Теперь мы можем перечислить все возможные критические индексы ФП БКТ:

$$G = A_n, \quad B_n, \quad C_n, \quad D_n (n \geq 2), \quad G_2, \quad F_4, \quad E_6, \quad E_7, \quad E_8, \quad (12)$$

$$\nu_G = 2/(n+3), \quad 1/2, \quad 1/n, \quad 1/n, \quad 2/5, \quad 1/4, \quad 1/7, \quad 1/10, \quad 1/16$$

Исходному показателю Костерлитца–Таулесса $\nu = 1/2$ соответствуют $\nu_{A_1} = \nu_{D_2} = \nu_{B_n}$. Для $V(\vec{\varphi})$ с системой минимальных дуальных корней $\{\mathbf{r}_v\}$ индексы ν_G для групп серий B_n и C_n переходят друг в друга, т.к. их корневые системы взаимно дуальны. Тот факт, что ν_G зависит только от h_G , приводит к совпадению ν_G для некоторых групп, действующих в разных пространствах, что может оказаться важным, когда $V(\varphi)$ составлен из характеров разных представлений разных групп. Наибольшим набором возможных значений ν_G обладает серия A_n , так как кроме индексов вида $1/k$ (где k – целые числа ≥ 2), она содержит еще индексы вида $2/(2k+1)$.

В низкотемпературной фазе корреляционные функции экспонент равны свободным корреляционным функциям с перенормированным показателем $\bar{\beta}$, зависящим от начального значения β_0 , $\bar{\beta} = \lim_{l \rightarrow 0} \beta(l)$ [4, 7]:

$$\left\langle \prod_{s=1}^t \exp(i(\mathbf{r}_s, \vec{\varphi}(x_s))) \right\rangle = \prod_{i \neq j}^t \left| \frac{x_i - x_j}{a} \right|^{\bar{\beta}(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j)/2\pi}, \quad \sum_{i=1}^t \mathbf{r}_i = 0. \quad (13)$$

В точке ФП (где $\bar{\beta} = \beta^* = 8\pi/r^2 = 4\pi$) у них появляется дополнительный логарифмический множитель, связанный с "нуль-зарядным" поведением g и δ на критической сепаратрисе – линии раздела фаз:

$$\prod_{i \neq j}^t \left(\ln \left| \frac{x_i - x_j}{a} \right| \right)^{\beta^*(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j)/2\pi A_G} = \prod_{i \neq j}^t \left(\ln \left| \frac{x_i - x_j}{a} \right| \right)^{h_G \cos(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j)}, \quad (14)$$

где $A_G = 4/h_G$ – коэффициент в уравнениях ренорм-групп для δ на критической сепаратрисе.

В заключение отметим, что ФП БКТ возможен и в одномерных системах, но там критические индексы оказываются не зависящими от симметрии [8]. Поэтому и для систем с исключительными группами симметрии они будут такими же, как и для классических групп.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96.02.17331-а).

1. М.Грин, Дж.Шварц, Е.Виттен, *Теория суперструн*, т.1,2, М.: Наука, 1990. (M.Green, J.H.Schwarz, and E.Witten, *Superstring theory*, v.1,2, Cambridge 1988).
2. А.В.Замолодчиков, *Rutherford - Appleton preprint* 89-001 (1989); Т.Егучи и С.К.Янг, *Phys. Lett.* **224**, 373 (1989); Т.Дж.Холлоуд и Р.Мансфилд, *Phys. Lett.* **226**, 73 (1989).
3. В.Л.Березинский, *ЖЭТФ* **59**, 907 (1970); **61**, 1144 (1971).
4. J.M.Kosterlitz and D.J.Thouless, *J. Phys.* **C6**, 118 (1973), J.M.Kosterlitz, *J. Phys.* **C7**, 1046 (1974).
5. С.А.Булгадаев, Письма в ЖЭТФ, в печати.
6. С.А.Булгадаев, *Теорет. матем. физика* **49**, 77 (1981).
7. S.A.Bulgadaev, *Nucl. Phys.* **B224**, 349 (1983).
8. С.А.Булгадаев, *Теорет. матем. физика* **51**, 424 (1982).